

Konsumdynamik interdependenter Lebensstilgruppen

Diplomarbeit von
Jaime Rojas Hernández
Matr.-Nr. 720256

Vorgelegt beim Physik-Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
an der Universität Potsdam
Oktober 2006

Erstgutachter: Prof. Dr. J. H. Schellnhuber
Zweitgutachter: Dipl. Phys. Douglas Maraun

Betreut von Dr. Matthias Lüdeke

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt zu haben. Sämtliche Quellen und Hilfsmittel sind angegeben. Die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Potsdam, den 16.10.2006

Jaime Rojas Hernández

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.3 Vorgehen	2
2. Modellformulierung	3
2.1 Neoklassische Theorie	3
2.1.1 Theorie des Haushalts	3
2.1.2 Untersuchung analytischer Nutzenfunktionen	5
2.2 Interdependente Nutzenfunktionen	11
2.2.1 Allgemeine Formulierung	11
2.2.2 Modell interdependenter Lebensstilgruppen	14
3. Fixpunkt- und lokale Stabilitätsanalyse	19
3.1 Untersuchung zweidimensionaler Systeme	19
3.1.1 Lsmod1	19
3.1.2 Lsmod2	26
3.1.3 Lsmod3	30
3.1.4 Lsmod4	37
3.2 Untersuchung dreidimensionaler Systeme	43
3.2.1 Lsmod1	44
3.2.2 Lsmod2	46
3.3 Systematisierung der Ergebnisse und Wahl des Modells	48
4. Anwendung auf beobachtete Konsumzeitreihen	50
4.1 Die CES-Nutzenfunktion	50
4.2 Analyse der Daten	52
5. Zusammenfassung und Diskussion	58
Appendix	60
Programm Codes	74
Literaturverzeichnis	90

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Schema: Stone-Geary-Nutzenfunktion	6
Abbildung 2: Schema: transzendente logarithmische Nutzenfunktion	7
Abbildung 3: Schema: Das quasi-ideale Nachfragesystem	8
Abbildung 4: Schema: CES-translog-Nutzenfunktion	9
Abbildung 5: Nichteindeutigkeit der Nachfragefunktion	10
Abbildung 6: Schema: Potential- oder Zielfunktion	16
Abbildung 7: Phasenraum zweidimensionaler Systeme	19
Abbildung 8: Schema: Konvergenzpunkte Lsmod1	22
Abbildung 9: Stabilitätsanalyse Lsmod1 (2D)	25
Abbildung 10: Stabilitätsbedingung für Eckfixpunkte in Lsmod2 (2D)	28
Abbildung 11: Stabilitätsbedingung für Kantenfixpunkte in Lsmod2 (2D)	28
Abbildung 12: Stabilitätsanalyse Lsmod2 (2D)	29
Abbildung 13: Schema: Konvergenzpunkte Lsmod3	32
Abbildung 14: Stabilitätsanalyse Lsmod3 (2D)	36
Abbildung 15: Schema: Konvergenzpunkte Lsmod4	39
Abbildung 16: mögliche Konvergenzpunkte in Lsmod4	40
Abbildung 17: Stabilitätsanalyse Lsmod4 (2D)	42
Abbildung 18: Phasenraum dreidimensionaler Systeme	43
Abbildung 19: Ergebnis der Stabilitätsanalyse dreidimensionaler Systeme	46
Abbildung 20: Relativer Verbrauch von Kernobst/Banane	53
Abbildung 21: Relativer Verbrauch von Schweinfleisch/Rindfleisch	53
Abbildung 22: Präferenzen-Zeitverlauf von Schwein-/Rindfleisch	54
Abbildung 23: Relativer Verbrauch von pflanzliche- /tierische Produkte	54
Abbildung 24: Präferenzen-Zeitverlauf von tierisch/pflanzlich	55
Abbildung 25: Relativer Verbrauch von Butter/Margarine	55
Abbildung 26: Präferenzen-Zeitverlauf von Butter/Margarine	56
Abbildung 27: Relativer Verbrauch von Bier/Wein	57
Abbildung 28: Präferenzen-Zeitverlauf von Bier/Wein	57
Abbildung 29: Verbrauchsmengenkombinationen gleichen Nutzens	62
Abbildung 30: Indifferenzkurve	63
Abbildung 31: Grenzrate der Substitution	64
Abbildung 32: Indifferenzkurvenschar	64
Abbildung 33: Isokline	65
Abbildung 34: Budgetrestriktion	66
Abbildung 35: Haushaltsoptimum	66
Abbildung 36: Engel-Kurve	69
Abbildung 37: Preiseffekt	70

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Stilisierte Milieu-Landkarte	12
Tabelle 2: Systematisierung der untersuchten Systeme	48
Tabelle 3: Stilisierte Milieu-Landkarte mit drei Haushalten	52
Tabelle 4: Input-Daten: Simulation der Präferenzen von Schwein-/Rindfleisch	73
Tabelle 5: Input-Daten: Simulation der Präferenzen von pflanzlich/tierisch	74
Tabelle 6: Input-Daten: Simulation der Präferenzen von Butter/Margarine	74
Tabelle 7: Input-Daten: Simulation der Präferenzen von Bier/Wein	74

1. Einleitung

1.1 Motivation

In der Neoklassischen Ökonomie nimmt man im Allgemeinen an, dass die Konsumschwankungen eines bestimmten Gutes nur von den Variationen der Preise der betrachteten Güter und von dem Einkommen der Konsumenten abhängen. Dabei macht man weiterhin die Annahme, dass die Konsumenten individuelle Entscheidungen treffen und dass sie sich gegenseitig in ihren Entscheidungen nicht beeinflussen. Wir werden untersuchen, wie sich solche Annahmen auf die Funktionen auswirken, die das Konsumverhalten der Akteure beschreiben.

„Mit der Festlegung von Annahmen wird vor allem das Ziel verfolgt, die theoretischen Überlegungen möglichst einfach zu halten. Mit mehr und strengeren Annahmen kann man es sich zwar einerseits immer einfacher machen, andererseits entfernt sich die Darstellung naturgemäß auch immer weiter von der Realität und wird immer abstrakter. Solange nichts anderes festgelegt wird, werden in der Neoklassischen Theorie die folgenden Annahmen gemacht:

- Raum und Zeit: Es gibt keine Entfernungen und Zeit spielt keine Rolle.
- Gut: Das jeweils betrachtete Gut ist sachlich immer gleich.
- Präferenzen: jeder Akteur hat eine vorgegebene unabhängige Präferenz bezüglich eines bestimmten Gutes.
- Personen: Es gibt keine Vorlieben oder Abneigungen.
- Informationen: Die Akteure kennen alle relevanten Informationen (Preise, etc).

Keine Frage, mit diesen grundsätzlichen Annahmen entfernen wir uns weit von der Realität, denn dort gibt es Entfernungen, Zeit spielt eine ganz wichtige Rolle, Güter gibt es in großer Vielfalt, die Präferenzen können sich ändern, Menschen neigen anderen zu oder lehnen sie ab und oft fehlen wichtige Informationen. Diese Annahmen erlauben es uns aber, von *einem* Markt zu sprechen, auf dem ein Gut zu *einem* Preis gehandelt wird. Streng genommen treffen diese Annahmen nur in der Theorie zu.“ (www.mikrooekonomie.de, siehe [5])

„Die wichtigste Annahme, von der regelmäßig ausgegangen wird, betrifft die Entscheidungen der Akteure. Es wird ihnen rationales Verhalten unterstellt. Dabei geht man von der sogenannten *Maximierungshypothese* aus, nach der die Konsumenten sich nicht mit einem „gewissen“ Niveau der Zufriedenheit begnügen. Sie streben nach *maximaler* Zufriedenheit bzw. nach maximalem Nutzen. Das bedeutet, wenn ein Mensch zwischen mehreren Alternativen A, B, C,...zu entscheiden hat, wird er immer diejenige auswählen, die ihm als die günstigste erscheint. Kommt eine Handlungs- oder Entscheidungsmöglichkeit neu in sein Gesichtsfeld, die ihm besser erscheint als alle anderen, wird er sie realisieren.“ („Einführung in die Mikroökonomie“, siehe [4])

Wir werden in dieser Arbeit ein allgemeines, auf die Grundlagen der Neoklassischen Theorie beruhendes Modell konstruieren, in dem die Interdependenz der Akteure, d.h. ihre soziale Wechselwirkung, betrachtet wird. Dieses Modell basiert auf den sozialen Interaktionsmechanismen der Aspiration und Distinktion (Pierre Bourdieu, Gary Becker). Wir nehmen an, dass der Konsum eine soziale Aktivität darstellt: Konsumenten beeinflussen sich gegenseitig in ihren Konsumententscheidungen und benutzen den Konsum, um ihre soziale Stellung zu symbolisieren. Bei dem Entscheidungsprozess berücksichtigt ein repräsentativer Akteur die Präferenzen anderer Konsumenten und diese haben somit einen direkten Einfluss auf seinen Nutzen. Im Gegensatz zu den

klassischen ökonomischen Modellen nehmen wir an, dass die Präferenzen der Konsumenten keine vorgegebenen konstanten Größen sind und dass diese auf die Konsumschwankungen eines bestimmten Gutes im Markt einen genauso wichtigen Einfluss wie Preise und Einkommen haben.

1.2 Stand der Forschung

In der Hoffnung, das komplizierte empirische Konsumverhalten erklären zu können, haben in den letzten Jahrzehnten viele Ökonomen immer komplexere und flexiblere Nutzenfunktionen entwickelt. Wenige sind bereit gewesen, über die alten o.g. Annahmen hinauszugehen und völlig neue Ansätze und Modelle zu erarbeiten, die ein realistischeres Bild des Konsumentenverhaltens liefern. Die neoklassischen ökonomischen Modelle, die auf diese vereinfachenden Annahmen beruhen, beschreiben Konsumenten als rationale Akteure, die ihren materiellen Nutzen unter gegebenen Randbedingungen bezüglich ihrer Präferenzordnung und ihres Einkommens maximieren. Dabei werden persönliche Präferenzen meist als exogen vorgegeben angesehen und damit bleiben sie also außerhalb der Modellbetrachtung. Die Präferenzordnung ändert sich in diesen Modellen weder über die Zeit, noch wird sie von außen, z.B. durch Werbung oder Erziehung beeinflusst. Auch steht der Nutzen eines bestimmten Akteurs damit nicht in Zusammenhang mit dem Nutzen anderer Akteure. Der individuelle Konsum eines repräsentativen Akteurs findet, abgesehen vom gegebenem Einkommen und Marktpreisen der relevanten Güter, ohne Einbettung in einen sozialen Kontext statt (Chung 1994). Die starken Einschränkungen dieser Annahmen bezüglich der Vielfalt menschlichen Verhaltens sind auch den meisten Ökonomen bewusst.

Der Ansatz interdependenter Nutzenfunktionen wurde schon einmal auf empirische Konsumzeitreihen angewandt ("Waves in Consumption with Interdependence among Consumers." Cowan & Cowan et al., 2004).

1.3 Vorgehen

Im Kapitel 1 (*Einleitung*) wurden die Motivation dieser Diplomarbeit und der aktuelle Stand der Forschung erklärt. Im Kapitel 2 (*Modellformulierung*) werden die wichtigsten Aspekte der neoklassischen Theorie des Haushalts beschrieben, gefolgt von einer Analyse unterschiedlicher Nutzenfunktionen und ihrer Einschränkungen (Unterkapitel 2.1). Im letzten Teil dieses Kapitels wird ein allgemeiner Ansatz für die Interdependenz von Nutzenfunktionen eingeführt (Unterkapitel 2.2). Im Kapitel 3 wird eine Fixpunkt- und eine lokale Stabilitätsanalyse der verschiedenen Differentialgleichungssysteme durchgeführt und ein konkretes Modell für die späteren Anwendungen gewählt. Im Kapitel 4 (*Anwendung auf beobachtete Konsumzeitreihen*) werden empirische Beispiele behandelt und mehrere Konsumzeitreihen simuliert. Im Kapitel 5 (*Zusammenfassung und Diskussion*) werden sowohl eine Kurzfassung der vorliegenden Arbeit und deren Ergebnisse als auch weitergehende Schlussfolgerungen diskutiert.

2. Modellformulierung

2.1 Neoklassische Theorie

2.1.1 Theorie des Haushalts

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Werkzeuge der neoklassischen Theorie des Haushalts für die elementare Analyse der Verbrauchsentscheidung erläutert.

Nehmen wir an, dass ein Haushalt sich zwischen verschiedenen Gütermengen vom Gut 1 und Gut 2 entscheiden muss (gehen wir davon aus, dass nur diese zwei Güter verbraucht werden). Er soll entscheiden, wie er sein Einkommen verwenden wird. Dem Haushalt stehen verschiedene Güterpaare oder *Güterbündel* zur Verfügung. Wenn ein Haushalt sich zwischen verschiedenen Alternativen entscheiden soll, dann besteht seine Entscheidungssituation aus drei wesentlichen Aspekten: den *Restriktionen*, den *Präferenzen*, und der *Zielvorstellung*. Die Restriktionen existieren in Bezug auf die Marktpreise der relevanten Güter und auf das vom Haushalt erzielte Einkommen, die Präferenzen sind vorgegeben und konstant und die Zielvorstellung des Haushalts besteht daraus, seinen Nutzen zu maximieren. Die Verbrauchsentscheidung unter der o.g. Restriktion wird in der klassischen Ökonomie durch die Maximierung der sogenannten Nutzenfunktion beschrieben. Die (direkte) Nutzenfunktion bezeichnet die Beziehung zwischen den erworbenen Mengen der betrachteten Güter q_1 und q_2 und dem Wohlergehen oder Nutzenniveau des Haushalts:

$$U = U(q_1, q_2) \quad (2.1)$$

Die geometrische Darstellung $q_1 = q_1(q_2)$ aller Güterbündel, die dem Haushalt den gleichen Nutzen oder Wohlergehen stiften, bezeichnet man als *Indifferenzkurve*. Die sogenannte *Grenzrate der Substitution* des Gutes 1 durch das Gut 2 in einem beliebig gewählten Punkt einer Indifferenzkurve definieren wir als das Verhältnis der ersetzten Menge des Gutes 1 zu der sie ersetzenden Menge des Gutes 2 (dabei wird von einer infinitesimal kleinen Änderung ausgegangen) und ist gleich dem Tangens der Steigung α der Indifferenzlinie an den betrachteten Punkt:

$$\tan \alpha = \left| \frac{dq_1}{dq_2} \right| \quad \text{Grenzrate der Substitution} \quad (2.2)$$

Die Grenzrate der Substitution des ersetzten Gutes durch das ersetzende Gut nimmt mit zunehmendem Verbrauch des ersetzenden Gutes ab (Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution). Es gibt nun gewisse Indifferenzkurven mit verschiedenen Güterbündeln (q_1, q_2) , die dem Haushalt ein höheres Nutzenniveau stiften. Um zu wissen, für welche Gütermengenkombination der Haushalt sich entscheiden wird, müssen wir die sogenannte Budgetrestriktion einführen. Gehen wir davon aus, der Haushalt verbraucht nur zwei Güter mit den Preisen p_1 und p_2 und er erzielt das Einkommen E , dann lautet die Budgetrestriktion des Haushalts:

$$E \geq p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 \rightarrow \text{Budgetrestriktion} \quad (2.3)$$

$$q_1 = E / p_1 - p_2 \cdot q_2 / p_1 \rightarrow \text{Budgetlinie} \quad (2.4)$$

Sie besagt, dass der Haushalt nicht mehr Geld ausgeben kann, als er an Einkommen erzielt. Die Budgetrestriktion schränkt dem Haushalt so ein, dass er nicht Güterbündel

erwerben kann, die mehr kosten als E . Die Budgetrestriktion trennt also das Realisierbare von dem Nichtrealisierbaren. Nun von allen Güterbündel, die der Haushalt erwerben kann, welches wird er genau wählen? Erinnern wir uns daran, dass der Haushalt seinen Nutzen zu maximieren versucht (Zielvorstellung). Versucht der Haushalt unter der gegebenen Restriktion seinen Nutzen zu maximieren, so wird man herausfinden, dass ein einziges Güterbündel diesem Erfordernis genügt. Es handelt sich um den Tangentialpunkt zwischen der Budgetlinie (2.4) und der von dem Haushalt höchsterreichbaren Indifferenzkurve. Dieser Punkt stellt das sogenannte *Haushaltsoptimum* dar. Im Haushaltsoptimum stimmen also die erste Ableitung der Indifferenzkurve und die Steigung der Budgetlinie überein. Das ist die Bedingung für das Haushaltsoptimum:

$$|dq_1 / dq_2| = p_2 / p_1 \quad (2.5)$$

Die Existenz eines eindeutigen Haushaltsoptimums (oder Nutzenmaximums) ist durch das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution gewährleistet.

Wenn der Haushalt die Marktpreise der betrachteten Güter kennt und er ein bestimmtes Einkommen erzielt, dann entscheidet er sich für das Güterbündel, das seinen Nutzen maximiert. Ändern sich die Preise der Güter und das Einkommen, so passt sich der Haushalt daran an, und das wiederum so, dass er seinen Nutzen maximiert. Das heisst, dass die Grundlage der Verbrauchsentscheidung des Haushalts immer Preise und Einkommen sind.

Wir können also unter der Budgetrestriktion und der Nutzenmaximierung aus der Nutzenfunktion die sogenannte Nachfragefunktion herleiten. Die Nachfragefunktionen

$$q_1^* = q_1^*(E, p_1, p_2) \quad (2.6)$$

$$q_2^* = q_2^*(E, p_1, p_2) \quad (2.7)$$

geben an, wie sich die nachgefragten Mengen von Gut 1 und Gut 2 in Abhängigkeit von den Preisen der relevanten Güter und des erzielten Einkommens verändern. Würde man die allgemeinen Eigenschaften dieser Funktionen kennen, so würde das für die Produzenten von höchstem Interesse sein.

Wie würden sich die nachgefragten Mengen der Güter durch Variationen des Einkommens verändern? Und wie würden sich die nachgefragten Mengen der Güter durch Variationen der Preise verändern?

Nehmen wir an, dass die Güterpreise konstant gehalten werden. Wir messen nun die Nachfrage eines Gutes i für verschiedene Einkommenshöhen. Die (E, q_i) -Darstellung, die daraus resultiert, stellt die sogenannte *Engel-Kurve* dar. Welchen genauen Verlauf die Engel-Kurve hat, hängt von den Eigenschaften und der Beschaffenheit der Nutzenfunktion ab. Aus dem Indifferenzkurvensystem des Haushalts lassen sich die Engel-Kurven der verschiedenen Güter herleiten.

Wir halten nun das Einkommen konstant. Wir messen jetzt die Nachfrage des Gutes 1 für steigende Preise vom Gut 1 bzw. vom Gut 2. Die (p_i, q_i) - bzw. die (p_j, q_i) -Darstellung stellt die sogenannte *Nachfragekurve* dar. Diese ist wiederum aus dem Indifferenzkurvensystem des Haushalts für die verschiedenen Güter herzuleiten. Sowohl

die Verläufe von den Engelkurven als auch die von den Nachfragekurven sind durch empirische Untersuchungen zu ermitteln.

Für eine gründlichere Betrachtung und Beschreibung der Neoklassischen Theorie der Verbrauchsentscheidung siehe Appendix 0. Es enthält eine auf zehn Seiten gekürzte Zusammenfassung des ersten Kapitels „Theorie des Haushalts“ aus dem Buch „Einführung in die Mikroökonomie“ von Robert Linde (siehe [4]).

2.1.2 Untersuchung analytischer Nutzenfunktionen und ihre Einschränkungen

In diesem Abschnitt werden wir unterschiedliche analytische Nutzenfunktionen $U(q_1, q_2)$ bzw. ihre entsprechenden Nachfragefunktionen $q_i(E, p_1, p_2)$ untersuchen. Wir gehen davon aus, dass zwei alternative Güter verbraucht werden. Da dies im weiteren Verlauf der Arbeit wichtig sein wird, werden wir die Einkommens- und Preisabhängigkeit des Konsums betrachten (*Engelkurven* und *Nachfragekurven*). Wir werden mit der Analyse einfacher Nutzenfunktionen anfangen und dann zu den Komplizierteren übergehen. Mit dieser Analyse verfolgen wir das Ziel, mögliche Einschränkungen im Verhalten der zu untersuchenden Nutzenfunktionen und Nachfragefunktionen herauszufinden. Die Nutzenfunktionen werden in ihrer chronologischen Reihenfolge diskutiert. Es wird sich dadurch herausstellen, dass, je moderner die betrachtete Nutzenfunktion ist, umso komplexer sind ihre Abhängigkeiten und die aus ihnen abzuleitenden Nachfragefunktionen. Bei jeder untersuchten Nutzenfunktion wird die Maximierungsrechnung, die zur entsprechenden Nachfragefunktion führt, nicht vorgeführt, da sie immer dem gleichen Schema einer Optimierung unter einer Randbedingung folgt, wobei die Methode der Lagrange-Multiplikatoren angewandt wird (für eine ausführliche Betrachtung und Diskussion dieser Nutzenfunktionen und ihrer Nachfragefunktionen siehe [10]).

Lineare logarithmische Nutzenfunktion. (auch Cobb-Douglas-Nutzenfunktion)

Diese lineare logarithmische Nutzenfunktion und ihre Nachfragefunktion lauten:

$$U = \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \ln q_i \Rightarrow q_i = \frac{b_i}{b_1 \cdot p_1 + b_2 \cdot p_2} \cdot \frac{E}{p_i} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \neq \frac{q_1}{q_2}(E)$$

mit $0 < b_i < 1$. Offensichtlich weist diese Nutzenfunktion ein sehr eingeschränktes Verhalten auf: Das optimale Güterverhältnis ist proportional dem Preisverhältnis und unabhängig vom Einkommen.

Stone-Geary-Nutzenfunktion.

Die Stone-Geary-Nutzenfunktion ist definiert als

$$U = \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \ln(q_i - \gamma_i) \Rightarrow q_i = \gamma_i + b_i \cdot \frac{E - p_1 \cdot \gamma_1 - p_2 \cdot \gamma_2}{p_i}$$

mit $0 < b_i < 1$, $\sum b_i = 1$, $\gamma_i > 0$ und $q_i - \gamma_i > 0$. Eine Methode, um die Beziehung zwischen den relevanten Größen (q_i , p_i und E) zu prüfen, ist die Untersuchung der Einkommens- bzw. der Preisabhängigkeit des relativen Konsums q_1/q_2 . Dafür betrachten wir die Ableitung $d(q_1/q_2)/dE$. Wenn wir uns fragen, für welche Werte von p_2/p_1 die Ungleichung $d(q_1/q_2)/dE \leq \text{bzw.} \geq 0$ erfüllt ist, ergibt sich folgendes (siehe Appendix 1 für eine ausführliche Rechnung):

$$d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow p_2 / p_1 \leq \text{bzw.} \geq \gamma_1 b_2 / \gamma_2 b_1.$$

Diese Ungleichungen entsprechen dem in Abbildung 1 gezeigten Ergebnis für das Verhalten des relativen Konsums in Abhängigkeit von Preisen und Einkommen. Die eingezeichneten Pfeile zeigen, wie sich der relative Konsum bei steigendem Einkommen in den unterschiedlichen Bereichen verhalten kann. Oberhalb der Nullstelle p_2^* / p_1^* darf bei steigendem Einkommen der relative Konsum nur steigen. Das wäre nach der Stone-Geary-Nutzenfunktion ein nicht erlaubtes oder „verbotenes“ Verhalten. Wie Abbildung 1 zeigt, existieren bei dieser Nutzenfunktion zwei Bereiche des Preisquotienten p_2 / p_1 , für die nur ein bestimmtes Vorzeichen der Ableitung $d(q_1 / q_2) / dE$ erlaubt ist. Diese Bereiche sind dabei durch die einzige Nullstelle p_2^* / p_1^* der Funktion $d(q_1 / q_2) / dE$ getrennt.

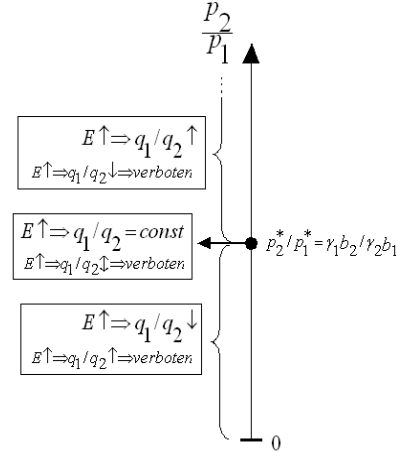


Abbildung 1

Direkte Houthakker-Nutzenfunktion.

Seien $0 < a_i < 1$ und $0 < b_i < 1$. Die Houthakker-Nutzenfunktion ist definiert als

$$U = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot q_i^{b_i} \Rightarrow q_i = \left(\frac{a_i \cdot b_i \cdot E / p_i}{\sum_j a_j \cdot b_j \cdot q_j^{b_j}} \right)^{\frac{1}{1-b_i}}$$

Falls $b_1 - b_2 > 0 \Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE \geq 0$, und zwar für alle Preise.

Falls $b_1 - b_2 < 0 \Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE \leq 0$, und zwar für alle Preise.

Die dahinterliegende Rechnung befindet sich im Appendix 2. Für gegebene Parameter b_1, b_2 nimmt die Ableitung $d(q_1 / q_2) / dE$ unabhängig von dem Wert der Preise also nur ein bestimmtes Vorzeichen an.

S-Branch-Nutzenfunktion.

Es gilt $b_i^{(s)} > 0$, $\gamma_i^{(s)} \geq 0$, $q_i^{(s)} - \gamma_i^{(s)} > 0$, $a^{(s)} > 0$, $\rho(s) = (\sigma(s) - 1) / \sigma(s)$ und $\sigma = 1 / (1 + \rho)$.

Man betrachtet bei der zu untersuchenden Nutzenfunktion eine Unterteilung in S Gütergruppen mit jeweils n Produkten. Die Substitution von einem Gut durch ein anderes ist sowohl innerhalb einer bestimmten Gütergruppe als auch zwischen verschiedenen Gütergruppen möglich. Die S-Branch-Nutzenfunktion ist definiert als

$$U = \left[\sum_{s=1}^S a^{(s)} \cdot \left\{ \sum_{i \in S} b_i^{(s)} \cdot (q_i^{(s)} - \gamma_i^{(s)})^{\rho(s)} \right\}^{\rho / \rho(s)} \right]^{1/\rho}.$$

Um die Eigenschaften dieser Nutzenfunktion zu verstehen, reicht es, wenn wir den Fall $S=1$ betrachten (für ausführliche Rechnung siehe Appendix 3):

$$q_i = \gamma_i + (b_i / p_i)^\sigma \cdot \left[\sum_{j=1}^2 (b_j / p_j)^\sigma \cdot p_j \right]^{-1} \cdot (E - \sum_{j=1}^2 \gamma_j p_j) \Rightarrow$$

$$q_1 / q_2 = \frac{p_2(\gamma_1(b_2 / p_2)^\sigma - \gamma_2(b_1 / p_1)^\sigma) + E(b_1 / p_1)^\sigma}{p_1(\gamma_2(b_1 / p_1)^\sigma - \gamma_1(b_2 / p_2)^\sigma) + E(b_2 / p_2)^\sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow a - bx^{1-2\sigma} + (cx - 1)x^{-\sigma} \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\text{mit } x = p_2 / p_1, a = \gamma_2 b_1^\sigma / \gamma_1 b_2^\sigma, b = b_2^{2\sigma} \text{ und } c = \gamma_2 / \gamma_1$$

Diese Ungleichung, die das Vorzeichen der Ableitung $d(q_1 / q_2) / dE$ bestimmt, ist eine transzendente Ungleichung und kann nicht analytisch gelöst werden. Diese Gleichung wurde numerisch untersucht und nicht mehr als zwei mögliche Nullstellen wurden gefunden. Das schematische Verhalten des relativen Konsums in Abhängigkeit von dem Preisquotienten und dem Einkommen ist analog zu dem in Abbildung 4 gezeigten.

Transzendente logarithmische Nutzenfunktion.

Die transzendente logarithmische Nutzenfunktion und ihre Nachfragefunktion lauten:

$$-\ln U = \ln a_0 + \sum_{i=1}^2 a_i \ln q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \ln q_i \ln q_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{E}{p_i} \cdot \frac{a_i + \sum_j b_{ij} \ln(p_j / E)}{a_i + \sum_j b_{ij} \ln(p_j / E) + a_j + \sum_i b_{ij} \ln(p_i / E)}$$

$$\Rightarrow q_1 / q_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{a_1 + b_{11} \ln(p_1 / E) + b_{12} \ln(p_2 / E)}{a_2 + b_{21} \ln(p_1 / E) + b_{22} \ln(p_2 / E)}$$

mit $0 < a_0 < 1$, $0 < a_i < 1$ und $b_{ij} = b_{ji}$. Eine triviale, aber aufwändige Rechnung führt zum folgenden Ergebnis (s. Appendix 4):

$$d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow p_2 / p_1 \geq \text{bzw.} \leq e^{(a_1 - \gamma a_2) / \lambda}.$$

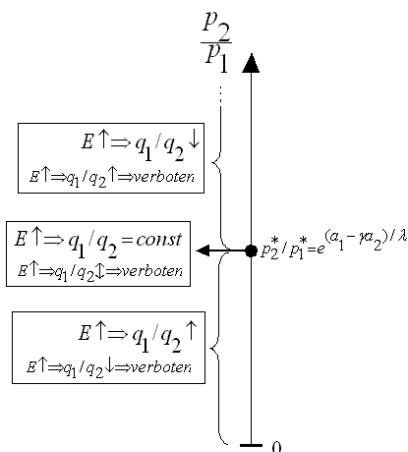


Abbildung 2

Mit $\gamma = (b_{11} + b_{12}) / (b_{21} + b_{22})$ und

$$\lambda = (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) / (b_{21} + b_{22}).$$

Abbildung 2 zeigt das Ergebnis der obigen Rechnung graphisch dargestellt. Wie man sieht, geht es um das gleiche Schema wie bei der Stone-Geary-Nutzenfunktion. Das Einzige, was sich verändert hat, ist das Vorzeichen der Ableitung und der Wert des Nullpunktes p_2^* / p_1^* . Obwohl diese Nutzenfunktion schon wesentlich komplizierter gestaltet ist als die Stone-Geary-Nutzenfunktion, sind ihre Einschränkungen erhalten geblieben.

Transzendente logarithmische Nutzenfunktion. (Das quasi-ideale Nachfragesystem)

Deaton und Muellbauer untersuchten Nachfragefunktionen auf die Grundlagen von Ausgabenfunktionen. Sie sind davon ausgegangen, dass ein optimierender Akteur seinen Nutzen dadurch *produziert*, dass er ein gewisses Subsistenzniveau und ein gewisses Genussniveau kombiniert. Sie betrachteten also Konsumenten als

Nutzenproduzenten. Das quasi ideale Nachfragesystem und seine Nachfragefunktion lauten:

$$\ln[E(u, p)] = (1 - \mu) \ln[a(p)] + \mu \ln[b(p)] \Rightarrow q_i = (a_i + \sum_{j=1}^2 b_{ij} \ln p_j + b_i \ln(E/P))E / p_i$$

$$\Rightarrow q_1 / q_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{a_1 + b_{11} \ln p_1 + b_{12} \ln p_2 + b_1 \ln(E/P)}{a_2 + b_{21} \ln p_1 + b_{22} \ln p_2 + b_2 \ln(E/P)}$$

wobei E die Ausgaben sind; u ist der Nutzenindex $0 < u < 1$; p ist der Preisvektor; $a(p)$ sind die Subsistenzausgaben (in der Form einer Translog-Funktion); und $b(p)$ sind die Genussausgaben (in der Form einer Cobb-Douglas-Translog-Funktion). P ist der zusammengesetzte Preisindex (aus den betrachteten Güterpreisen). Der optimierende Akteur versucht also für ein gegebenes Nutzenniveau u seine Kosten E zu minimieren (siehe [10] für eine ausführliche Beschreibung).

Für die detaillierte Berechnung von $d(q_1 / q_2) / dE$ siehe Appendix 5. Die Rechnung von Appendix 4 führt zu der folgenden Schlussfolgerung:

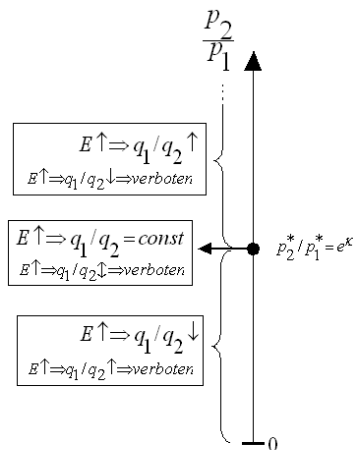


Abbildung 3

$$d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow p_2 / p_1 \leq \text{bzw.} \geq e^\kappa$$

Mit $\kappa = (a_2 b_1 - a_1 b_2) / (b_{21} b_1 - b_{11} b_2)$

Dieses Ergebnis ist in Abbildung 3 graphisch dargestellt. Es handelt sich um das gleiche Verhalten wie in Abbildung 1 bzw. 2. Die Richtung der Ableitung $d(q_1 / q_2) / dE$ bezüglich des Nullpunktes p_2^* / p_1^* ist genau die gleiche wie bei der Stone-Geary-Nutzenfunktion in Abbildung 1. Trotz der steigenden Komplexität der gewählten Nutzenfunktionen bleiben ihre Einschränkungen bezüglich der Beschreibung des Konsumverhaltens erhalten.

CES-Translog-Nutzenfunktion.

Diese Nutzenfunktion wurde erst in den neunziger Jahre entwickelt und angewandt und ist daher noch relativ „modern“. Es handelt sich um die letzte hier untersuchte Nutzenfunktion. Sie ist definiert wie folgt:

$$-\ln U = a_0 + \frac{1}{1 - \sigma} \ln \left(\sum_{i=1}^2 a_i \ln q_i^{1-\sigma} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \ln q_i \ln q_j$$

mit den Bedingungen $b_{ij} = b_{ji}$ und $\sum a_i = 1$. Für $b_{ij} = 0, \forall i, j$ und $a_0 = 0$ geht die CES-Translog-Nutzenfunktion in die normale CES-Nutzenfunktion über, die wir später im Kapitel 4 gebrauchen werden. Aus der Maximierungsrechnung erhält man folgende Nachfragefunktion:

$$q_i = \frac{E}{p_i} \cdot \frac{a_i (p_i / E) / [\sum_k a_k (p_k / E)^{1-\sigma}] + \sum_j b_{ij} (p_j / E)}{1 + \sum_k \sum_i b_{kj} \ln(p_j / E)}$$

Für die detaillierte Berechnung von $d(q_1/q_2)/dE$ siehe Appendix 6. Die Rechnung von Appendix 6 führt zu der folgenden Schlussfolgerung:

$$d(q_1/q_2)/dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow [1+ax^{1-\sigma}]^{-1} - \kappa[1+(ax^{1-\sigma})^{-1}]^{-1} + \lambda \ln x \leq \text{bzw.} \geq 0$$

mit $x = p_2/p_1$, $a = a_2/a_1$, $\lambda = (b_{22}b_{11} + b_{12}^2)/(b_{12} + b_{22})$ und $\kappa = (b_{11} + b_{12})/(b_{12} + b_{22})$.

Diese Ungleichung, die das Vorzeichen der Ableitung $d(q_1/q_2)/dE$ bestimmt, ist eine transzendente Ungleichung und wir können sie daher nicht analytisch lösen. Trotzdem können wir eine wichtige Aussage über die Form ihrer Lösung machen. Die transzendente Form führt dazu, dass in Abhängigkeit der Parameter der Ungleichung mehr als eine Nullstelle auftreten kann. Diese transzendente Ungleichung wurde numerisch untersucht und es traten (so wie für die S-Branch-Nutzenfunktion) nicht mehr als zwei Nullstellen auf. Es handelt sich also um das qualitativ gleiche Ergebnis wie bei der S-Branch-Nutzenfunktion. Ein möglicher Verlauf dieser transzendentalen Funktion wird in Abbildung 4 gezeigt. Innerhalb von jedem Bereich mit einem bestimmten Vorzeichen herrscht die gleiche Einschränkung wie bei der Stone-Geary-, der S-Branch-, der transzendentalen logarithmischen Nutzenfunktion und dem quasiidealem Nachfragesystem.

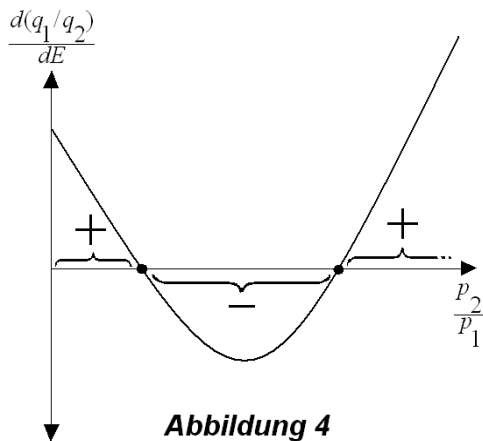


Abbildung 4

Wir haben nun einige Nutzenfunktionen untersucht. Für alle erzeugten Nachfragefunktionen gilt $d(q_1/q_2)/dE = f(x)$, mit $x = p_2/p_1$. Die Existenz dieser Beziehung führt zu der Entstehung von zwei (oder maximal drei) Bereichen, in denen die Ableitung $d(q_1/q_2)/dE$ ein gegebenes Vorzeichen annimmt. Die Tatsache, dass nur zwei oder drei solcher Bereiche existieren können, bedeutet eine sehr starke Einschränkung für die Beschreibung des menschlichen Konsumverhaltens. Trotz der steigenden Komplexität der gezeigten Nutzenfunktionen blieb das unflexible Verhalten der Nachfragefunktionen erhalten.

Allgemeine Untersuchung der Eindeutigkeit von Nutzenfunktionen.

Wir werden nun als weiteren Punkt in Erwägung ziehen, warum die Beziehung $U = U(E, p_1, p_2)$ bzw. $q_i^* = q_i^*(E, p_1, p_2)$ eine wichtige Einschränkung darstellt. Die analytische Auswertbarkeit der Nutzenfunktionen ist für die Ökonomen immer ein sehr bequemes Werkzeug gewesen. Auf der anderen Seite muss man den hohen Preis zahlen, dass die Beschreibung sich von der Realität entfernt. Bedenken wir kurz was die analytische Vorhersagbarkeit der Nachfragefunktion impliziert: Für eine gegebene Kombination von Parametern E , p_1 und p_2 ergibt sich aus der Nachfragefunktion ein eindeutiger Verbrauch von Gut 1 und von Gut 2. Bedenken wir, ob das realistisch ist: wir fixieren E , p_1 und p_2 , aber verändern den Zeitpunkt der Entscheidung. Unsere Präferenzen mögen sich mit der Zeit geändert haben! Würden wir tatsächlich unter den gleichen Bedingungen E , p_1 und p_2 eine identische Entscheidung treffen? Lautet die Antwort „Nein“, dann wäre es interessant zu wissen, unter welchen Umständen Nachfragefunktionen eine eindeutige Lösung besitzen. Deshalb werden wir uns jetzt mit

der Frage befassen, unter welchen allgemeinen Bedingungen Nutzenfunktionen zu eindeutigen Nachfragefunktionen führen.

Betrachten wir eine allgemeine, von zwei Gütern abhängende Nutzenfunktion (Gl (2.1)):

$$U = U(q_1, q_2) \quad (2.8)$$

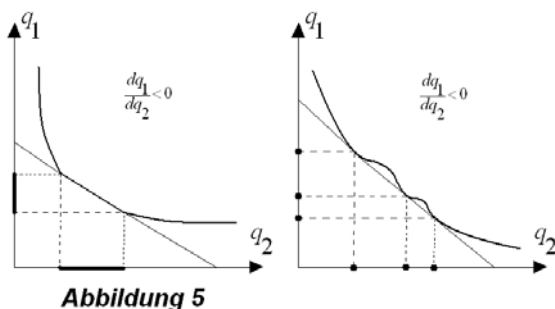
Wir erinnern uns jetzt an die *regulierende Bedingungen* (siehe Appendix 0 Gleichungen (0.3) und (0.4)) die für ein „ökonomisch logisches“ Verhalten der Nutzenfunktion sorgen. Es geht um die Monotonie („Je mehr umso besser“) und um die Konvexität der Nutzenfunktion („Je mehr ich habe umso weniger glücklich macht mich eine weitere Einheit des Gutes i“):

$$U_i = \partial U / \partial q_i > 0 \quad \text{mit } i=1,2 \rightarrow \text{Monotonie} \quad (2.9)$$

$$U_{ii} = \partial^2 U / \partial^2 q_i < 0 \quad \text{mit } i=1,2 \rightarrow \text{Konvexität} \quad (2.10)$$

Wie hängt der Verlauf der Indifferenzkurve $q_1 = q_1(q_2)$ mit diesen beiden Bedingungen zusammen? Entlang der Indifferenzlinie gilt $dU = 0$. Wenn wir dieses Differential ausrechnen, ergibt sich:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = - \frac{\partial U / \partial q_2}{\partial U / \partial q_1} \quad (2.11)$$



Das bedeutet, dass die Ableitung der Indifferenzkurve $q_1 = q_1(q_2)$ immer negativ ist (weil die ersten partiellen Ableitungen positiv definiert sind). Also sind die Indifferenzkurven unter diesen Bedingungen immer fallend. Diese Bedingung sichert aber noch nicht die Eindeutigkeit der Nachfragefunktion $q_i^* = q_i^*(E, p_1, p_2)$. Das zeigt Abbildung 5: Die erste Indifferenzlinie enthält einen fallenden linearen Teil, während die zweite eine Zick-Zack-Bewegung ausführt, bei der sie streng monoton fallend bleibt. Bei beiden Nutzenfunktionen sind die Indifferenzkurven streng monoton fallend, und wie man sieht, sichert das nicht die Eindeutigkeit der Nachfragefunktion. Die Bedingung die wir noch voraussetzen müssen, damit solche Bewegungen nicht stattfinden können, ist die Konkavität der Indifferenzlinien. Es soll also gelten:

$$\frac{d^2 q_1}{dq_2^2} > 0 \quad (2.12)$$

Man kann das anders ausdrücken: Ist das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution der betrachteten Nutzenfunktion erfüllt, so ist die Existenz eines eindeutigen Haushaltsoptimums immer gewährleistet. Dieses Erfordernis garantiert also die Eindeutigkeit der Nachfragefunktion. Um zu bestimmen, unter welchen Bedingungen Gl. (2.12) erfüllt ist, berechnen wir die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{dq_2^2} &= \frac{d}{dq_2} \left(\frac{dq_1}{dq_2} \right) = \frac{d}{dq_2} \left(-\frac{U_2}{U_1} \right) = -\frac{1}{U_1} \frac{dU_2}{dq_2} + \frac{U_2}{U_1^2} \frac{dU_1}{dq_2} = -\frac{1}{U_1^2} \left(U_1 \frac{dU_2}{dq_2} - U_2 \frac{dU_1}{dq_2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{d^2 q_1}{dq_2^2} = -\frac{1}{U_1^2} \left(U_1 \frac{dU_2}{dq_2} - U_2 \frac{dU_1}{dq_2} \right) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Wir brauchen das totale Differential der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{dU_2}{dq_2} &= \frac{d}{dq_2} \frac{\partial}{\partial q_2} U = \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{d}{dq_2} U(q_1, q_2) = \frac{\partial U_2}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dq_2} + \frac{\partial U_2}{\partial q_2} = U_{21} \frac{dq_1}{dq_2} + U_{22} = -U_{21} \frac{U_2}{U_1} + U_{22} \\ \frac{dU_1}{dq_2} &= \frac{d}{dq_2} \frac{\partial}{\partial q_1} U = \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{d}{dq_2} U(q_1, q_2) = \frac{\partial U_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dq_2} + \frac{\partial U_1}{\partial q_2} = U_{11} \frac{dq_1}{dq_2} + U_{12} = -U_{11} \frac{U_2}{U_1} + U_{12} \end{aligned}$$

Jetzt können wir diese beiden Ausdrücke in Gleichung (1.22) einsetzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^2 q_1}{dq_2^2} &= -\frac{1}{U_1^2} \left(U_1 \frac{dU_2}{dq_2} - U_2 \frac{dU_1}{dq_2} \right) = -\frac{1}{U_1^2} \left(U_1 \left(-U_{21} \frac{U_2}{U_1} + U_{22} \right) - U_2 \left(-U_{11} \frac{U_2}{U_1} + U_{12} \right) \right) \\ &\Rightarrow \frac{d^2 q_1}{dq_2^2} = \frac{1}{U_1} \left(2 \cdot \frac{U_2}{U_1} U_{12} - U_{22} - \frac{U_2^2}{U_1^2} U_{11} \right). \quad (2.14) \end{aligned}$$

Wir wissen aus den Regeln der Monotonie und der Konkavität (Gleichungen (2.9) und (2.10)), dass alle partiellen Ableitungen erster Ordnung positiv und alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung negativ sind. Daraus folgt, dass fast alle Terme von Gleichung (2.14) positiv sind (mit Ausnahme von der partiellen gemischten Ableitung). Man kann nicht allgemein sagen, welches Vorzeichen die gemischte partielle Ableitung der Nutzenfunktion hat. Wir müssen uns deswegen fragen, für welche Werte der gemischten partiellen Ableitung die zweite Ableitung der Indifferenzkurve positiv ist (und damit die Nachfragefunktion eindeutig ist). Die Antwort erhalten wir durch die folgende Ungleichung:

$$d^2 q_1 / dq_2^2 > 0 \Leftrightarrow U_{12} > \frac{1}{2} \left(\frac{U_1}{U_2} U_{22} + \frac{U_2}{U_1} U_{11} \right) \quad (2.15)$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist stets negativ. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist es gewährleistet, dass die Nachfragefunktion eindeutig ist.

2.2 Interdependente Nutzenfunktionen

2.2.1 Allgemeine Formulierung

In diesem Abschnitt werden wir einen allgemeinen Ansatz für die *Interdependenz* von Nutzenfunktionen formulieren. Unser Ansatz basiert auf der sozialen Wechselwirkung zwischen Konsumenten. Es ist offensichtlich, dass Faktoren wie gesellschaftliche Anerkennung oder Ablehnung, Nachahmungseffekte, aber auch die relative Position innerhalb einer Gruppe, direkt den Nutzen beeinflussen, der aus dem Konsum bestimmter Güter gezogen wird. Dadurch steht der Nutzen eines repräsentativen Akteurs in Verbindung mit dem Nutzen anderer Akteure.

Wir gehen von der Annahme aus, dass man den durchschnittlichen Konsumenten nicht über die ganze Gesellschaft mitteln kann (wie es in der klassischen Ökonomie gemacht wird), sondern man muss zumindest bestimmte Gruppen unterscheiden. Betrachten wir einen repräsentativen Konsumenten, dann lassen sich bezüglich dieses Konsumenten drei spezifische Gruppen charakterisieren: eine gleiche Konsumentengruppe, mit der der Konsument eine Reihe von Konsumaktivitäten teilt; eine Distinktionsgruppe, von deren Akteuren der Konsument sich gerne unterscheiden möchte; und eine Aspirationsgruppe, zu der der Konsument gerne gehören würde, und mit deren Akteuren der Konsument gerne Konsumaktivitäten teilen würde. Wir gehen von der vereinfachenden Annahme aus, dass die Konsumenten anhand ihres *Lebensstilspektrums* aufgeteilt werden können, und dass in Abhängigkeit davon, wo der Konsument in diesem Spektrum einzugliedern ist, die Orientierung an anderen Konsumentengruppen sich verändert. Im Allgemeinen orientiert sich ein Konsument an den im Lebensstilspektrum benachbarten Gruppen. In der Soziologie nimmt man oft an, dass der repräsentative Akteur danach strebt, sich von den relativ ärmeren Gruppen zu unterscheiden (*Distinktionseffekt*) und das Konsumverhalten der relativ reicheren Gruppen zu imitieren (*Aspirationseffekt*). Auf diese Weise orientieren sich die Akteure an bestimmten Distinktions- und Aspirationsgruppen, was im Endeffekt den Nutzen der Konsumenten beeinflusst. Sie verändern ihre Präferenzen so, dass sie den Konsum der Aspirationsgruppen nachahmen und den der Distinktionsgruppen möglichst vermeiden. Konsumenten ändern dadurch ständig ihre Präferenzen bezüglich der relevanten Güter und damit verändert sich auch ständig ihre Nutzenfunktion und ihre Nachfragefunktion.

Um zu einer Stilisierung für Modellzwecke zu kommen, kann der soziale Raum mit seinen unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen je nach Bedarf in einem einfachen Schema repräsentiert werden. Eine Möglichkeit der Schematisierung besteht darin, diesen sozialen Raum sowohl in der vertikalen (Lage nach Einkommen) als auch in der horizontalen (Werthaltung) Dimension in drei Segmente zu unterteilen:

Oberschicht (hohes Einkommen)	<i>Konservative</i> β_{31}	<i>Etablierte</i> β_{32}	<i>Postmaterielle Elite</i> β_{33}
Mittelschicht (mitt. Einkommen)	<i>Kleinbürgertum</i> β_{21}	<i>Aufstieg/Bürgerliche Mitte</i> β_{22}	<i>Experimentalisten</i> β_{23}
Unterschicht (niedr. Einkommen)	<i>Traditionelle Arbeiterschicht</i> β_{11}	<i>Konsumistische Arbeiterschicht</i> β_{12}	<i>Hedonisten</i> β_{13}
	Traditionell	Modern (Konsumismus)	Postmodern (Postmaterialismus)

Tabelle 1: Stilisierte Milieu-Landkarte

Eine weitere Vereinfachung dieser Schematisierung besteht daraus, die horizontale Dimension (nach Werthaltung) völlig ausser Betracht zu lassen, und nur die unterschiedlichen Einkommensklassen (hoch, mittel und niedrig) zu betrachten.

Wir wollen nun ein Konzept der „Präferenz“ einführen, das sich zunächst von der entsprechenden Operationalisierung in der Neoklassik unterscheidet (siehe Kap. 2.1), im folgenden aber wieder integriert wird. Betrachten wir nun den Konsum von zwei Gütern. Wenn ein Akteur der Gruppe *ij* sich zwischen bestimmten Mengen vom Gut 1

und vom Gut 2 entscheiden muss, dann hat er bezüglich des Gutes 1 die Präferenz β_{ij}^1 und bezüglich des Gutes 2 die Präferenz β_{ij}^2 . Für diese Präferenzen soll immer die folgende Einschränkung gelten:

$$\beta_{ij}^1 + \beta_{ij}^2 = 1 \text{ mit } \beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2 \in [0,1] \quad (2.16)$$

Die beiden Präferenzen sind also nicht voneinander unabhängig (Gl. (2.16)). Die Präferenz drückt die Wertschätzung oder Vorliebe eines Akteurs für das betrachtete Gut aus. Wie wir später sehen werden, sind die Präferenzen von den Preisen der relevanten Güter und von dem Einkommen der Konsumenten völlig unabhängig. Ist die Präferenz für einer der beiden Güter bekannt, wird die Präferenz für das andere Gut sofort durch die Beziehung (2.16) fixiert. Sie sorgt gleichzeitig dafür, dass die Präferenz der Konsumenten nicht beliebig groß sein darf. D.h., würden die Konsumenten überhaupt nicht nach Preisen und Einkommen entscheiden, würden sie ihre Konsumententscheidungen nur nach Änderungen in den Präferenzen β_{ij}^1 und β_{ij}^2 verändern. Da die beiden Präferenzen nicht voneinander unabhängig sind, betrachten wir im Weiteren nur noch β_{ij} mit $\beta_{ij} = \beta_{ij}^1$. Der entsprechende Wert von β_{ij}^2 lässt sich aus Gleichung (2.16) ermitteln.

Wird der soziale Raum in n Einkommensgruppen und m Werthaltungsgruppen unterteilt, so stellt die Variable β_{ij} die Präferenz der gesellschaftlichen Gruppe ij für das Gut 1 dar. Der Verlauf der Präferenz β_{ij} hängt von dem Verlauf der Präferenzen der restlichen $nm-1$ gesellschaftlichen Gruppen ab. Ihre Abhängigkeit sei durch folgendes Funktional F gegeben:

$$\beta_{ij}(\cdot) = F_{ij}[\beta_{11}(\cdot), \dots, \beta_{1m}(\cdot), \dots, \beta_{n1}(\cdot), \dots, \beta_{nm}(\cdot)] \quad (2.17)$$

mit $i=1, \dots, n \rightarrow n$ Einkommensgruppen
und $j=1, \dots, m \rightarrow m$ Werthaltungsgruppen

Anders formuliert: der Verlauf der Präferenz eines repräsentativen Akteurs hängt von der Geschichte oder der Vergangenheit der Präferenzen der anderen gesellschaftlichen Gruppen ab. Wie schon erwähnt, hängen diese neuen Variablen von keinen sonstigen Variablen ab. Sie werden nicht mehr als fixe vorgegebene Größen angesehen, sondern sie sind Variablen, die sich im System (also in der Gesellschaft) endogen regulieren. Die wichtige Information, die man aus den Präferenzen gewinnt, sind die *Vorlieben* der Konsumenten bezüglich der betrachteten Güter. Ein Beispiel mag das verdeutlichen: Vielleicht liebt der durchschnittliche Konsument der „Bürgerlichen Mitte“ (siehe Tabelle 1) Schwein zu essen, während er Soja-Produkte hasst. Wären Sojaprodukte teurer als Schweinefleisch, so könnte er trotzdem auf Schwein verzichten und mehr Soja-Produkte essen, wenn er sehen würde, dass in der „Konsumistischen Arbeiterschicht“ (von der er sich unterscheiden möchte) viel Schwein gegessen wird, während die „Etablierten“ (den er sich ähneln möchte) viel Soja essen.

In der neoklassischen Theorie des Haushalts ist die Nutzenfunktion eine Funktion der Mengen der betrachteten Güter (Gleichung (2.1)):

$$U = U(q_1, q_2) \Rightarrow q_i = q_i(E, p_1, p_2) \quad (2.18)$$

Die optimale Nachfrage ist damit eine Funktion der Preise der betrachteten Güter und vom Einkommen des Konsumenten. Unsere Erweiterung besteht daraus, dass wir in dieser Abhängigkeit die zusätzliche Variable β_{ij} (Präferenz der gesellschaftlichen Gruppe) einführen. Alle sonstigen neoklassischen Eigenschaften der Nutzenfunktion bleiben erhalten. Es soll also gelten:

$$U_{ij} = U_{ij}(q_1, q_2, \beta_{ij}) \quad (2.19)$$

Die Nutzenfunktion U_{ij} bezieht sich in diesem Fall auf die Nutzenfunktion des durchschnittlichen Akteurs der Gruppe ij . Daraus resultiert die folgende Beziehung für die Abhängigkeit der Nachfragefunktionen von Gut 1 und Gut 2:

$$q_1^{ij} = q_1^{ij}(E_i, p_1, p_2, \beta_{ij}) \quad \text{und} \quad q_2^{ij} = q_2^{ij}(E_i, p_1, p_2, \beta_{ij}) \quad (2.20)$$

In diesem Fall (im Vergleich zu der neoklassischen Nutzenfunktion) hat das Einkommen den Index i , weil jede Gruppe ein unterschiedliches Einkommen erzielt. Auf der rechten Seite von Gleichung (2.19) sieht man, dass die Nutzenfunktion eines durchschnittlichen Akteurs der Gruppe ij auch von seiner Präferenz für das betrachtete Gut abhängt. Und wir oben gesehen haben, hängt der Verlauf der Präferenz der Akteure der Gruppe ij von dem Verlauf oder der Vorgeschichte der Präferenz der restlichen $nm-1$ gesellschaftlichen Gruppen ab. Nun sind also alle Nutzenfunktionen voneinander abhängig oder anders gesagt, interdependent. Das bedeutet: Für gegebene Preise der relevanten Güter, ein bestimmtes erzieltes Einkommen und eine bestimmte (sich ändernde) Präferenz bezüglich dieser Güter kann der Konsument seinen Nutzen maximieren. Nach diesem Ansatz würde man also nicht erwarten, dass die Konsumententscheidung durch die bloße Kenntnis von Preisen und Einkommen außerhalb des sozialen Kontexts fallen kann.

Dieser neue Ansatz für interdependente Nutzenfunktionen (Gleichung (2.19) und (2.20)) ist aber nicht von dem vereinfachenden Ansatz der neoklassischen Theorie (Gleichung (2.18)) entkoppelt. Unter einer bestimmten Voraussetzung findet ein Übergang von dem Ansatz interdependenter Nutzenfunktionen zum neoklassischen Ansatz statt. Darum kann der Ansatz interdependenter Nutzenfunktionen als eine Verallgemeinerung des neoklassischen Ansatzes angesehen werden, der aber den zusätzlichen Faktor der sozialen Wechselwirkung der Konsumenten betrachtet. Wie wir später sehen werden, findet der Übergang zwischen beiden Ansätzen unter der Voraussetzung statt, dass das *endogene Potenzial* der Akteure der unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen *viel größer* als das *exogene Potenzial* ist.

2.2.2 Modell interdependenter Lebensstilgruppen

In diesem Abschnitt werden wir unterschiedliche Modelle für die Beschreibung der Dynamik der Präferenzen β_{ij} einführen. Erinnern wir uns daran, dass es hauptsächlich zwei soziale Interaktionsmechanismen gibt: Auf der einen Seite möchte der Akteur der gesellschaftlichen Gruppe ij sich von einer (oder mehreren) Distinktionsgruppe(n) unterscheiden; auf der anderen Seite möchte er auch eine Elite von Konsumenten der Aspirationsgruppe(n) imitieren. Was kann er unter diesen Bedingungen machen, um seinem Ziel möglichst nah zu kommen? Er wird seine Präferenzen bezüglich der betrachteten Güter so verändern, dass sie sich möglichst von den Präferenzen der Distinktionsgruppen entfernen werden, während sie den Präferenzen der Aspirationsgruppen näher rücken werden. Um die zeitliche Veränderung der Präferenzen β_{ij} zu beschreiben, definieren wir die *Zielfunktion* oder *Potenzial* z_{ij} :

$$z_{ij} = \mu_{ij} \cdot h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) - \sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot g(\beta_{ij} - \beta_{kl}) \quad (2.21)$$

mit $f_{ijkl} \in \mathfrak{R}$, $\mu_{ij} \in \mathfrak{R}_+$, $\beta_{ij}^p \in \mathfrak{R}_+$ und $0 \leq \beta_{ij}^p \leq 1$. Die Zielfunktion nennen wir auch Potenzial, weil sie für die Präferenzen eine ähnliche Rolle spielt wie das physikalische Potenzial für die physikalischen Kräfte. Dabei soll klar sein, dass das Potenzial nicht die beobachtbare Größe ist, sondern nur die Kraft oder in unserem Fall die Änderung der Präferenzen der Akteure (z.B. durch eine Beobachtung des Konsums oder durch eine Umfrage).

Der erste Term der Gleichung (2.21) stellt das *endogene Potenzial* der Gruppe ij dar. Es geht um eine Art „physikalischer“ Rückstellkraft mit der Kraftkonstante μ_{ij} , die die Gruppe ij zur *persönlichen* oder *endogenen Präferenz* β_{ij}^p hinzieht. Das endogene Potenzial drückt aus, wie der durchschnittliche Akteur der Gruppe ij von seiner persönlichen oder endogenen Präferenz β_{ij}^p angezogen wird. Die Funktion $h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij})$ steht für die genaue Form der Abhängigkeit dieses Potenzials. Für die Form dieser Funktion werden wir später unterschiedliche Ansätze machen. Stellen wir uns vor, der durchschnittliche Konsument der Gruppe ij wird alleine auf einer Insel mit einem Supermarkt gelassen, dann würde er nicht sehen, was die anderen Gruppen konsumieren, so dass er sich nicht an ihnen orientieren könnte. Er würde dann diejenigen Güter kaufen, für die er persönliche Vorlieben hat. Die Konsumententscheidung würde ohne jeglichen sozialen Einfluss fallen. Unter dieser Bedingung würde die Präferenz des Akteurs wohl konstant bleiben, und zwar gleich seiner persönlichen Präferenz β_{ij}^p . Der zweite Term der Gleichung (2.21) stellt das *exogene Potenzial* der Gruppe ij dar. Das exogene Potenzial beschreibt, wie der durchschnittliche Akteur der gesellschaftlichen Gruppe ij von den restlichen $mn-1$ gesellschaftlichen Gruppen angezogen bzw. abgestoßen wird. Der Parameter f_{ijkl} gibt das Vorzeichen und das Gewicht der Orientierung der Lebensstilgruppe ij bezüglich der Lebensstilgruppe kl an. Man kann die Bedeutung dieser Parameter wie folgt zusammenfassen:

- kl ist Aspirationsgruppe bezüglich $ij \Rightarrow f_{ijkl} > 0$ (die Gruppe kl zieht die Gruppe ij an)
- kl ist Distinktionsgruppe bezüglich $ij \Rightarrow f_{ijkl} < 0$ (die Gruppe kl stößt die Gruppe ij ab)
- ij ist gleichgültig bezüglich $kl \Rightarrow f_{ijkl} = 0$ (Gruppe ij wird von der Gruppe kl weder angezogen noch abgestoßen)

Je größer der Betrag von f_{ijkl} ist, umso stärker ist der entsprechende Distinktionseffekt (für $f_{ijkl} < 0$) bzw. der Aspirationseffekt (für $f_{ijkl} > 0$). Die Funktion $g(\beta_{ij} - \beta_{kl})$ gibt die Form der Entfernungsabhängigkeit der sozialen Interaktion (Anziehung oder Abstoßung) zwischen den verschiedenen gesellschaftlichen Gruppen an. Wie man sieht, es wird über alle gesellschaftlichen Gruppen summiert. Für ihre genaue Abhängigkeit werden wir später unterschiedliche Ansätze machen. Das exogene Potenzial beschreibt dann die Orientierung bezüglich der äußeren Welt oder des sozialen Raums. Die Zielfunktion oder Potenzial enthält damit einen endogenen und einen exogenen Anteil.

Das Ziel ist jetzt z_{ij} bezüglich β_{ij} zu maximieren. Die Änderungsrate und Richtung, um im Sinne eines Gradienten-Abstiegsverfahrens dieses Maximum zu erreichen, ist gegeben durch

$$\frac{dz_{ij}}{d\beta_{ij}} = \mu_{ij} \cdot \frac{dh(\beta_{ij}^p - \beta_{ij})}{d\beta_{ij}} - \sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot \frac{dg(\beta_{ij} - \beta_{kl})}{d\beta_{ij}} = \Gamma_{ij}(\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{n1}, \dots, \beta_{nm}). \quad (2.22)$$

Mit Hilfe von Abbildung 6 kann man das Verhalten der Änderungsrate der Präferenz (Gleichung (2.22)) verstehen. Betrachten wir β_{ij} in Abbildung 6 als Präferenz der Bezugsgruppe. Die Präferenz β_{kl}^{asp} der Aspirationsgruppe kl bezüglich ij befindet sich oberhalb von β_{ij} ($\beta_{ij} < \beta_{kl}^{asp}$). Die Präferenz β_{mn}^{dis} der Distinktionsgruppe mn bezüglich ij befindet sich unterhalb von β_{ij} ($\beta_{ij} > \beta_{mn}^{dis}$). Intuitiv kann man sagen, dass β_{ij} nach oben wandern sollte. Dieser Effekt kann als eine Abstoßung von der Distinktionsgruppe und eine Anziehung von der Aspirationsgruppe verstanden werden. Die Änderungsrate von β_{ij} , und damit auch die Änderungsrichtung von β_{ij} , wird positiv sein. Analog dazu, geschieht die Änderung von β_{ij} , wenn man mehrere Distinktions- und Aspirationsgruppen betrachtet. Man kann also schreiben: $d\beta_{ij} \propto \Gamma_{ij}$. Damit ist die Grundlage geschaffen, um ein Differentialgleichungssystem für die zeitliche Entwicklung der Präferenzen β_{ij} zu definieren. Mit Hilfe der in Gleichung (2.22) definierten Änderungsrate können wir die *Bewegungsgleichungen* für die Präferenzen β_{ij} wie folgt, definieren:

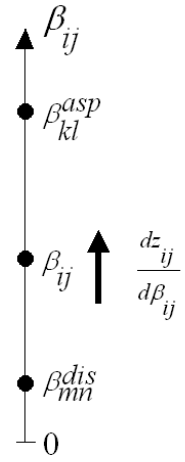


Abbildung 6

$$\frac{d\beta_{ij}}{dt} = v \cdot \left(\mu_{ij} \cdot \frac{dh(\beta_{ij}^p - \beta_{ij})}{d\beta_{ij}} - \sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot \frac{dg(\beta_{ij} - \beta_{kl})}{d\beta_{ij}} \right) + \eta(t) \quad (2.23a)$$

$$\frac{d\beta_{ij}}{dt} = v \cdot \Gamma_{ij}(\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{n1}, \dots, \beta_{nm}) + \eta(t) \quad (2.23b)$$

Die zeitliche Änderung der Präferenzen ist damit definiert. Der Parameter v determiniert, wie groß die Zeit-Skala der Präferenzanpassung ist. Er gibt also an, wie schnell die Präferenzen der unterschiedlichen Gruppen sich ändern. $\eta(t)$ ist ein gleichverteilter Rauschterm. Dieser Zufallsterm beschreibt die Ungewissheit bei der Entscheidung über die Änderung der eigenen Präferenzen.

Für eine beliebige Anfangsbedingung $\vec{\beta}(t=0) = (\beta_{11}^0, \dots, \beta_{1m}^0, \dots, \beta_{n1}^0, \dots, \beta_{nm}^0)$ kann man dann durch eine einfache Differenzgleichung im Sinne des Eulerschen Verfahrens die Trajektorie des Systems $\beta_{ij}(t)$ aufintegrieren:

$$\beta_{ij}(t + \Delta t) = \beta_{ij}(t) + (v \cdot \Gamma_{ij}(\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{n1}, \dots, \beta_{nm}) + \eta_t) \cdot \Delta t \quad (2.24)$$

Bis jetzt haben wir die zwei Funktionen $g(\beta_{ij} - \beta_{kl})$ und $h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij})$ nur allgemein betrachtet. Jetzt werden wir vier verschiedene Ansätze formulieren. Wir definieren die vier folgenden Differentialgleichungssysteme:

(i) $g(\beta_{ij} - \beta_{kl}) = |\beta_{ij} - \beta_{kl}|$ und $h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) = -|\beta_{ij}^p - \beta_{ij}|$. Das ergibt für $\dot{\beta}_{ij}(t)$:

$$\Rightarrow \dot{\beta}_{ij} = v \cdot \left(-\sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot \text{Signum}(\beta_{ij} - \beta_{kl}) + \mu_{ij} \cdot \text{Signum}(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) \right) + \eta(t) \quad (2.25)$$

Damit ist die Funktion Γ_{ij} unstetig, abstandsunabhängig (im β_{ij} -Raum: wichtig ist nur die Reihenfolge der Präferenzen β_{ij}) und symmetrisch (weil beide Funktionen g und h die gleiche Abhängigkeit haben). Dieses System bezeichnen wir ab jetzt *Lsmod1* (Lifestyle-Model 1). Der Lösungsalgorithmus für dieses Differentialgleichungssystem wurde in der Sprache PV-Wave programmiert. Das Programm befindet sich im Appendix unter Code 1.

(ii) $g(\beta_{ij} - \beta_{kl}) = (\beta_{ij} - \beta_{kl})^2 / 2$ und $h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) = -(\beta_{ij}^p - \beta_{ij})^2 / 2$. Für $\dot{\beta}_{ij}(t)$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \dot{\beta}_{ij} = v \cdot \left(-\sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot (\beta_{ij} - \beta_{kl}) + \mu_{ij} \cdot (\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) \right) + \eta(t) \quad (2.26)$$

Damit ist die Funktion Γ_{ij} stetig, linear abstandsabhängig (im β_{ij} -Raum) und symmetrisch. Dieses System bezeichnen wir *Lsmod2* (Lifestyle-Model 2). Das Programm mit dem entsprechenden Lösungsalgorithmus befindet sich im Appendix unter Code 2.

(iii) $g(\beta_{ij} - \beta_{kl}) = |\beta_{ij} - \beta_{kl}|$ und $h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) = -(\beta_{ij}^p - \beta_{ij})^2 / 2$. Wir erhalten für $\dot{\beta}_{ij}(t)$:

$$\Rightarrow \dot{\beta}_{ij} = v \cdot \left(-\sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot \text{Signum}(\beta_{ij} - \beta_{kl}) + \mu_{ij} \cdot (\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) \right) + \eta(t) \quad (2.27)$$

Damit ist die Funktion Γ_{ij} unstetig, abstandsabhängig (im β_{ij} -Raum) und asymmetrisch (weil die Funktionen g und h unterschiedliche Abhängigkeiten aufweisen). Dieses System bezeichnen wir jetzt *Lsmod3* (Lifestyle-Model 3). Der Lösungsalgorithmus für das Differentialgleichungssystem (2.27) befindet sich im Appendix unter Code 3.

(iv) $g(\beta_{ij} - \beta_{kl}) = (\beta_{ij} - \beta_{kl})^2 / 2$ und $h(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) = -|\beta_{ij}^p - \beta_{ij}|$. Es ergibt sich für $\dot{\beta}_{ij}(t)$:

$$\Rightarrow \dot{\beta}_{ij} = v \cdot \left(-\sum_{k,l} f_{ijkl} \cdot (\beta_{ij} - \beta_{kl}) + \mu_{ij} \cdot \text{Signum}(\beta_{ij}^p - \beta_{ij}) \right) + \eta(t) \quad (2.28)$$

Damit ist die Funktion Γ_{ij} unstetig, abstandsabhängig (im β_{ij} -Raum) und asymmetrisch. Dieses System bezeichnen wir jetzt *Lsmod4* (Lifestyle-Model 4). Der Lösungsalgorithmus des Differentialgleichungssystems (2.28) befindet sich im Appendix unter Code 4.

Die Gleichungen (2.25), (2.26), (2.27) und (2.28) sind die vier Differentialgleichungssysteme die wir im nächsten Abschnitt (über *Lokale Stabilitätsanalyse*) untersuchen werden. Der Grund, warum für die Funktionen g und h verschiedene Ansätze gemacht werden, ist, dass man nicht genau weißt, wie die Abhängigkeit von menschlichen Präferenzen strukturiert ist. Durch den Vergleich der vier Systeme werden wir uns für das Modell mit dem plausibelsten Verhalten entscheiden können.

Wir werden jetzt eine kurze Erklärung für jedes der vier oben definierten Modelle geben:

- 1) Das Modell *Lsmod1*, das durch Gleichung (2.25) definiert ist, ist im β_{ij} -Raum abstandsunabhängig, unstetig und symmetrisch. Das bedeutet: Den Konsument

interessiert nur die Reihenfolge der Präferenzen der anderen gesellschaftlichen Gruppen bez. der eigenen Präferenz und der endogenen Präferenz. Insofern ist die Änderungsrate der eigenen Präferenz für einen repräsentativen Akteur nicht davon abhängig, wie weit sich die endogene Präferenz und die Präferenzen der Distinktions- und der Aspirationsgruppen befinden. Sie haben für eine vorgegebene Reihenfolge der Präferenzen der gesellschaftlichen Gruppen bzw. der endogenen Präferenz eine konstante Änderungsrate.

- 2) Das Modell *Lsmod2*, das durch Gleichung (2.26) definiert ist, ist symmetrisch, stetig und im β_{ij} -Raum abstandsabhängig. Das heisst: in Kontrast zum vorherigen Modell schauen die Akteure dieses Modells sehr wohl danach, wie weit weg sich die endogene Präferenz und die Präferenz der Distinktions- und der Aspirationsgruppen befinden.
- 3) Das Modell *Lsmod3*, das durch die Gleichung (2.27) definiert ist, ist asymmetrisch, unstetig und abstandsabhängig. Die Akteure dieses Modells beachten nur die Reihenfolge der Präferenzen der anderen gesellschaftlichen Gruppen, während sie nach der Entfernung der endogenen Präferenz genau anschauen.
- 4) Das Modell *Lsmod4*, das durch Gleichung (2.28) definiert ist, ist asymmetrisch, unstetig und abstandsabhängig. Die Akteure dieses Modells schauen danach, wie weit entfernt sich die Präferenzen der unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen befinden, während sie abstandsunabhängig nach der endogenen Präferenz schauen.

Betrachten wir nun wieder den Spezialfall, dass der durchschnittliche Akteur der Gruppe ij sich alleine auf einer Insel mit einem Supermarkt befindet. Unter diesen Bedingungen wäre er unbeeinflusst von den Präferenzen der Akteure der restlichen $mn-1$ gesellschaftlichen Gruppen. Er würde also nur nach seinen persönlichen Vorlieben und Präferenzen konsumieren. Seine Präferenz würde zu seiner endogenen Präferenz β_{ij}^p entwickeln und dort unverändert bleiben. Das gleicht der Annahme der neoklassischen Theorie, dass Konsumenten sich in ihren Verbrauchsentscheidungen nicht beeinflussen und dass ihre Präferenzen vorgegeben und konstant sind. Dieses Verhalten tritt nach unserem Ansatz nur dann auf, wenn der zweite Term von Gleichung (2.21) vernachlässigbar klein gegenüber dem ersten ist. Anders gesagt: das endogene Potenzial soll viel größer sein als das exogene Potential und zwar für alle gesellschaftliche Gruppen. Das gleicht der Bedingung, dass alle Parameter $\lambda_{ijkl} = f_{ijkl} / \mu_{ij}$ gegen Null streben. Diese Bedingung stellt den Übergang von dem Ansatz interdependenter Nutzenfunktionen zum neoklassischen Ansatz dar. Wir können schreiben:

$$U_{ij}(q_1, q_2, \beta_{ij}) \xrightarrow{\lambda_{ijkl} \rightarrow 0, \forall ijkl, ij \neq kl} U(q_1, q_2) \quad (2.29)$$

Für die hergeleiteten Nachfragefunktionen können wir dann schreiben:

$$q_1^{ij}(E_i, p_1, p_2, \beta_{ij}) \xrightarrow{\lambda_{ijkl} \rightarrow 0, \forall ijkl, ij \neq kl} q_1(E, p_1, p_2) \quad (2.30a)$$

$$q_2^{ij}(E_i, p_1, p_2, \beta_{ij}) \xrightarrow{\lambda_{ijkl} \rightarrow 0, \forall ijkl, ij \neq kl} q_2(E, p_1, p_2) \quad (2.30b)$$

Nur unter dieser speziellen Bedingung gilt der vereinfachende Ansatz der neoklassischen Theorie.

3. Fixpunkt- und lokale Stabilitätsanalyse

3.1 Untersuchung zweidimensionaler Systeme

Bevor wir mit der Untersuchung der einzelnen Systeme anfangen, erinnern wir uns an die Einschränkung (2.16). Alle Präferenzen liegen immer im Intervall $[0,1]$. Diese Bedingung führt dazu, dass der Phasenraum der zweidimensionalen Systeme ein Quadrat der Länge Eins ist. Wie vorher schon erwähnt wurde, werden wir im Weiteren β_{ij} als eine Abkürzung für β_{ij}^1 schreiben. Wir betrachten in diesem Unterkapitel zweidimensionale Systeme, d.h., Systeme wo nur zwei gesellschaftliche Gruppen miteinander wechselwirken. Wir bezeichnen dann mit β_1 die Präferenz der Gruppe 1 für das Gut 1 und mit β_2 die Präferenz der Gruppe 2 für das Gut 1. In Abbildung 7 sehen wir den zweidimensionalen Phasenraum mit den Bedingungen, die für die Existenz der unterschiedlichen Fixpunkte $\vec{\beta}^*$ notwendig sind.

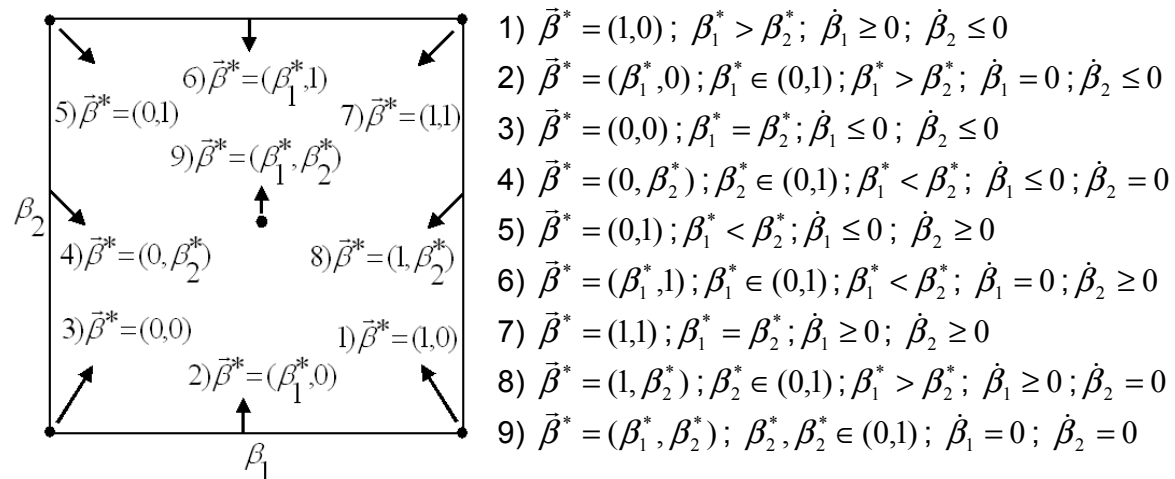


Abbildung 7

Bei den nächsten Untersuchungen werden der Einfachheit halber der Rauschterm $\eta(t)$ gleich Null beziehungsweise die Präferenzanpassung v gleich Eins gesetzt.

3.1.1 LsmoD1 (2D)

Wir werden nun die zweidimensionale Variante des Systems *LsmoD1* auf Fixpunkte und deren Stabilität untersuchen. Das Differentialgleichungssystem ist das folgende:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot \text{Signum}(\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot \text{Signum}(\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot \text{Signum}(\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot \text{Signum}(\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Fixpunktanalyse.

Möglich sind nur die neun oben eingeführten Fixpunkte. Mit den entsprechenden Bedingungen werden wir ermitteln, für welche Parameterkombinationen es überhaupt Fixpunkte gibt. Wir erhalten für die entsprechenden Fixpunkte folgende Ergebnisse:

1) $\vec{\beta}^* = (1,0)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \leq 0$

$\Rightarrow -f_1 + \mu_1 \cdot \text{Signum}(\beta_1^p - 1) \geq 0$ und $f_2 + \mu_2 \cdot \text{Signum}(\beta_2^p) \leq 0$

Wir machen die folgende Substitution: $\lambda_i = f_i / \mu_i$. Der Wert von λ_i sagt aus, wie gross das exogene Potenzial in Bezug auf das endogene Potenzial ist. Sei $\sigma(\dots) = \text{Signum}(\dots)$, dann gilt:

$$1) \vec{\beta}^* = (1,0); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -\lambda_1 + \sigma(\beta_1^p - 1) \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_1^p = 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p < 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda_2 + \sigma(\beta_2^p) \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_2^p = 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p > 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq -1 \end{array} \right.$$

Sowohl bei diesem als auch bei den folgenden Fixpunkten existiert der betrachtete Fixpunkt, nur wenn eine Kombination der obigen Bedingungen erfüllt ist. Das bedeutet, eine Bedingung aus der ersten geschweiften Klammer muss zusammen mit einer Bedingung der zweiten Klammer erfüllt sein. Wie man sieht schließen sich unterschiedliche Kombinationen gegenseitig aus.

$$2) \vec{\beta}^* = (\beta_1^*, 0); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) = \lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 2 wenn } \beta_1^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_1 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 2 wenn } \beta_1^* = \beta_1^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_1 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 2 wenn } \beta_1^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_1 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda_2 + \sigma(\beta_2^p) \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_2^p = 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p > 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$3) \vec{\beta}^* = (0,0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \Rightarrow \sigma(\beta_1^p) \leq 0 \Rightarrow \beta_1^p = 0 \text{ und } \sigma(\beta_2^p) \leq 0 \Rightarrow \beta_2^p = 0$$

$$4) \vec{\beta}^* = (0, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \sigma(\beta_1^p) \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_1^p = 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p > 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) = \lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_2 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 4 wenn } \beta_2^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_2 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 4 wenn } \beta_2^* = \beta_2^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_2 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 4 wenn } \beta_2^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_2 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 4} \end{array} \right.$$

$$5) \vec{\beta}^* = (0,1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \sigma(\beta_1^p) \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_1^p = 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p > 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -\lambda_2 + \sigma(\beta_2^p - 1) \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_2^p = 1 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p < 1 \Rightarrow \lambda_2 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$6) \vec{\beta}^* = (\beta_1^*, 1); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) = -\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 6 wenn } \beta_1^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_1 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 6 wenn } \beta_1^* = \beta_1^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_1 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 6 wenn } \beta_1^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_1 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 6} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -\lambda_2 + \sigma(\beta_2^p - 1) \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_2^p = 1 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p < 1 \Rightarrow \lambda_2 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$7) \vec{\beta}^* = (1,1); \beta_1^* = \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \Rightarrow \sigma(\beta_1^p - 1) \geq 0 \Rightarrow \beta_1^p = 1; \sigma(\beta_2^p - 1) \geq 0 \Rightarrow \beta_2^p = 1$$

$$8) \vec{\beta}^* = (1, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda_1 + \sigma(\beta_1^p - 1) \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_1^p = 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p < 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) = -\lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_2 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 8 wenn } \beta_2^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_2 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 8 wenn } \beta_2^* = \beta_2^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_2 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 8 wenn } \beta_2^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_2 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 8} \end{array} \right.$$

9) $\vec{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*); \beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0$. Diese Bedingungen gelten für die inneren Fixpunkte. Durch Einsetzen dieser Bedingungen ergibt sich:

$$-\lambda_1 \cdot \sigma(\beta_1 - \beta_2) + \sigma(\beta_1^p - \beta_1) = 0$$

$$-\lambda_2 \cdot \sigma(\beta_2 - \beta_1) + \sigma(\beta_2^p - \beta_2) = 0$$

Es gibt drei Bereiche im Phasenraum, die durch die Diagonale $\beta_1 = \beta_2$ getrennt werden:

i) Bedingung 9a: $\beta_1 > \beta_2$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) = \lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9a wenn } \beta_1^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_1 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9a wenn } \beta_1^* = \beta_1^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_1 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9a wenn } \beta_1^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_1 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 9a} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) = -\lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_2 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9a wenn } \beta_2^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_2 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9a wenn } \beta_2^* = \beta_2^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_2 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9a wenn } \beta_2^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_2 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 9a} \end{array} \right.$$

ii) Bedingung 9b: $\beta_1 = \beta_2$

$$\sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) = 0 \Rightarrow \beta_1^* = \beta_1^p$$

$$\sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) = 0 \Rightarrow \beta_2^* = \beta_2^p \quad \text{mit} \quad \beta_1^* = \beta_2^* \Rightarrow \beta_1^p = \beta_2^p$$

iii) Bedingung 9c: $\beta_1 < \beta_2$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) = -\lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9c wenn } \beta_1^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_1 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9c wenn } \beta_1^* = \beta_1^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_1 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9c wenn } \beta_1^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_1 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 9c} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) = \lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \lambda_2 = 1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9c wenn } \beta_2^p > 0 \\ \text{falls } \lambda_2 = 0 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9c wenn } \beta_2^* = \beta_2^p \in (0,1) \\ \text{falls } \lambda_2 = -1 \Rightarrow \exists \text{ Fixpunkt 9c wenn } \beta_2^p < 1 \\ \text{falls } \lambda_2 \notin \{-1,0,1\} \Rightarrow \text{es existiert kein Fixpunkt 9c} \end{array} \right.$$

Die konkreten Werte der vier Parameter β_1^p , β_2^p , λ_1 und λ_2 bestimmen, ob die verschiedenen Fixpunkte existieren oder nicht. Nun können wir sehen, dass erstens in Gleichung (3.2) die rechte Seite unstetig ist und zweitens dass für alle Präferenzen β_{ij} die Einschränkung $\beta_{ij} \in [0,1]$ gilt, was eine zusätzliche Unstetigkeit darstellt. Das kann unter Umständen dazu führen, dass die Phasenraumtrajektorie in einem infinitesimal kleinen Bereich des Phasenraums verweilt, ohne dass die Bedingung $\dot{\beta}_{ij} = 0, \forall i, j$ erfüllt ist. Es geht also um *Konvergenzpunkte*.

Konvergenzpunkte.

Wir werden jetzt die Bedingungen für die Existenz der Konvergenzpunkte formulieren. Das Differentialgleichungssystem (3.1) können wir zusammenfassen als:

$$\dot{\beta}_i = -f_i \cdot \sigma(\beta_i - \beta_j) + \mu_i \cdot \sigma(\beta_i^p - \beta_i) \quad \dot{\beta}_i = -f_i \cdot \sigma(\beta_i - \beta_j) + \mu_i \cdot \sigma(\beta_i^p - \beta_i) \quad (3.2)$$

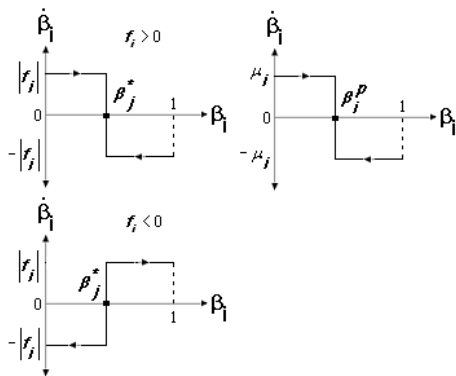


Abbildung 8

Man kann sich durch Abbildung 8 klarmachen unter welchen Umständen ein solches Verhalten auftreten kann. Solche Konvergenzpunkte können nur vorkommen, wenn der absolute Wert von f_i ungleich dem Wert von μ_i ist. Also: $|f_i| \neq \mu_i$ oder $|\lambda_i| \neq 1$. Diese Bedingung ist für ihre Existenz notwendig. Ist sie nicht erfüllt, entstehen ganze Bereiche, wo sich die Ableitung ganz aufhebt (marginale Fixpunkte). Die verschiedenen Parameterkombinationen, die zu einem solchen Verhalten führen, können wir jetzt auflisten:

$$\mu_i > |f_i| \quad \text{und} \quad f_i > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \mu_j > |f_j| \quad \text{und} \quad f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p) \\ 2) \mu_j > |f_j| \quad \text{und} \quad f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p) \\ 3) \mu_j < |f_j| \quad \text{und} \quad f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p) \\ 4) \mu_j < |f_j| \quad \text{und} \quad f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, 1 \vee 0) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
\mu_i > |f_i| \text{ und } f_i < 0 \\
\mu_i < |f_i| \text{ und } f_i > 0 \\
\mu_i < |f_i| \text{ und } f_i < 0
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
2) \mu_j > |f_j| \text{ und } f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p) \\
5) \mu_j > |f_j| \text{ und } f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p) \\
6) \mu_j < |f_j| \text{ und } f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p) \\
7) \mu_j < |f_j| \text{ und } f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, 1 \vee 0) \\
\\
3) \mu_j > |f_j| \text{ und } f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_j^p, \beta_j^p) \\
6) \mu_j > |f_j| \text{ und } f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (\beta_j^p, \beta_j^p) \\
8) \mu_j < |f_j| \text{ und } f_j > 0 \Rightarrow f_i > f_j \Rightarrow \exists \text{ Kp. } \vec{\beta}^* = (\beta_j^p, \beta_j^p) \\
\quad \quad \quad \Rightarrow f_i < f_j \Rightarrow \exists \text{ Kp. } \vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_i^p) \\
9) \mu_j < |f_j| \text{ und } f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = ? \\
\\
4) \mu_j > |f_j| \text{ und } f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (1 \vee 0, \beta_j^p) \\
7) \mu_j > |f_j| \text{ und } f_j < 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = (1 \vee 0, \beta_j^p) \\
9) \mu_j < |f_j| \text{ und } f_j > 0 \Rightarrow \exists \text{ Konvergenzpunkt } \vec{\beta}^* = ? \\
10) \mu_j < |f_j| \text{ und } f_j < 0 \Rightarrow \text{KEIN Konvergenzpunkt}
\end{array}
\right.$$

Die Konvergenzpunkte mit der gleichen Nummer sind symmetrisch bezüglich der Geraden $\lambda_2 = -\lambda_1$. Sie entsprechen damit qualitativ dem gleichen Fall. Nur wenn die beiden endogenen Präferenzen β_1^p und β_2^p ungleich sind (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$), können die Konvergenzpunkte 1, 2, 3, 5 und 8 auftreten. Die restlichen treten unabhängig von dieser Bedingung auf.

Stabilitätsanalyse.

Jetzt werden wir überprüfen unter welchen Bedingungen die verschiedenen Fixpunkte lokal stabil sind. Das bedeutet, wir betrachten eine infinitesimal kleine Störung des Fixpunktes um den Betrag ε . Wenn die Störung mit der Zeit kleiner wird, dann nennt man diesen Fixpunkt stabil. Wird die Störung größer nennt man ihn instabil. Falls die Störung im Laufe der Zeit unverändert bleibt, nennt man einen solchen Fixpunkt marginal. In dem vorliegenden System haben wir alle drei Arten von Fixpunkten. Wir werden sowohl marginale als auch instabile weglassen. Wir interessieren uns also nur für die stabilen, da diese für mögliche Anwendungen von besonderer Relevanz sind.

Als erstes betrachten wir die gewöhnlichen „Eckenfixpunkte“ 1 und 5. Hier gelten die Ungleichungen $\dot{\beta}_1 \geq \text{bzw.} \leq 0$ und $\dot{\beta}_2 \geq \text{bzw.} \leq 0$. Für die Stabilitätsanalyse lassen wir die Gleichheitszeichen dieser Ungleichungen außer Betracht. Es soll also gelten $\dot{\beta}_1 > \text{bzw.} < 0$ und $\dot{\beta}_2 > \text{bzw.} < 0$. Dass diese Bedingung für die Stabilität der Eckenfixpunkte sorgt, liegt daran, dass bei einer infinitesimal kleinen Verschiebung des Fixpunktes das Vorzeichen der Ableitung der Präferenz $\dot{\beta}_i$ erhalten bleibt. Damit wird die Störung immer kleiner bis sie verschwindet.

Betrachten wir jetzt die „Kantenfixpunkte“ 2, 4, 6 und 8. Bei diesen Fixpunkten gibt es immer eine Komponente β_i die gleich Null oder gleich Eins ist. Für diese Komponente

soll (wie bei den Eckenfixpunkten) nicht mehr die Ungleichung $\dot{\beta}_i \geq \text{bzw.} \leq 0$ sondern $\dot{\beta}_i > \text{bzw.} < 0$ gelten. Für die Komponenten mit $\beta_j \in (0,1)$ und $\dot{\beta}_j = 0$ soll die Bedingung $\lambda_j = 0$ gelten, sonst handelt es sich um einen marginalen Fixpunkt. Sind die zwei erwähnten Bedingungen erfüllt, dann ist der betrachtete Kantenfixpunkt lokal stabil.

Auf analoge Weise gilt für die Fixpunkte 9a und 9c, dass nur diejenigen Parameterkombinationen stabile Fixpunkte erzeugen, für die gilt: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$. Alle anderen Parameterkombinationen erzeugen marginale Fixpunkte.

Für die inneren Fixpunkte mit $\beta_1^* = \beta_2^*$ (oder $\beta_1^p = \beta_2^p$) also 3, 7 und 9b müssen wir eine kompliziertere Betrachtung durchführen. Der Grund ist, dass wir uns genau auf der Unstetigkeit der Signumfunktion von Gleichung (3.1) befinden. Wir müssen das System um den Fixpunkt linearisieren und dann eine Eigenwertrechnung durchführen. Um dies zu ermöglichen, müssen wir eine stetige Näherung für die Signumfunktion in Gleichung (3.1) durchführen. Wir wählen den Tangens Hyperbolicus:

$$\tanh(ax) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \sigma(x) = \text{Signum}(x) \quad (3.3)$$

Für die Taylor-Reihe des Tangens Hyperbolicus gilt: $\tanh(ax) = ax + O(x^2)$. Es gilt also für das Differentialgleichungssystem (3.1),

$$\begin{aligned} -f_1 \cdot \tanh(a(\beta_1 - \beta_2)) + \mu_1 \cdot \tanh(a(\beta_1^p - \beta_1)) &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} -f_1 \cdot \sigma(\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot \sigma(\beta_1^p - \beta_1) \\ -f_2 \cdot \tanh(a(\beta_2 - \beta_1)) + \mu_2 \cdot \tanh(a(\beta_2^p - \beta_2)) &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} -f_2 \cdot \sigma(\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot \sigma(\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned}$$

Nur wenn a gegen unendlich strebt, gilt die vollständige Analogie zwischen den Systemen, so dass sie die gleichen Stabilitätseigenschaften haben. Das linearisierte System ist also:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot a(\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot a(\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot a(\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot a(\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Mit Hilfe der *Jacobi-Matrix* können wir das *charakteristische Polynom* ausrechnen, aus dem wir die *Eigenwerte* des Systems ermitteln können. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\begin{aligned} \omega^2 + \Psi\omega + \Xi &= 0 \quad (3.5) \\ \text{mit } \Psi &= a(f_1 + f_2 + \mu_1 + \mu_2) \text{ und } \Xi = a^2(f_1\mu_2 + f_2\mu_1 + \mu_1\mu_2). \end{aligned}$$

Die Parameter ω sind die Eigenwerte des linearisierten Systems. Aus dem Polynom ergeben sich die zwei Eigenwerte:

$$\omega_{1,2} = \frac{a}{2} [-(1 + \lambda_1)\mu_1 - (1 + \lambda_2)\mu_2 \pm \sqrt{((1 + \lambda_1)\mu_1 + (1 + \lambda_2)\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}]$$

oder auch

$$\omega_{1,2} = \frac{a}{2} \mu_2 [-(1 + \lambda_1)m - (1 + \lambda_2) \pm \sqrt{((1 + \lambda_1)m + (1 + \lambda_2))^2 - 4m(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}]$$

mit $m = \mu_1 / \mu_2$. Diejenigen Parameterkombinationen, die den Realteil der beiden Eigenwerte negativ machen, erzeugen lokal stabile Fixpunkte. Den Parameter a kann man außer Betracht lassen, weil er keinen Einfluss auf das Vorzeichen der Eigenwerte hat.

Als letztes betrachten wir die Konvergenzpunkte. Infinitesimale Verschiebungen um den betrachteten Konvergenzpunkt führen zu Bereichen, wo sich die Ableitung der Präferenz $\hat{\beta}_i$ nicht verändert. Das bedeutet, dass Störungen nach einer gewissen Zeit verschwinden. Die Konvergenzpunkte sind also immer stabil.

Wir haben die gewöhnlichen Fixpunkte von 1 bis 9 und die Konvergenzpunkte analysiert und wir kennen nun alle Stabilitätskriterien. Das Programm *stab1* wertet die hergeleiteten Bedingungen für die Stabilität des Systems (3.1) aus. Es wurde in der Sprache *PV-Wave* programmiert und befindet sich im Appendix unter Code 5 (unter Codes).

Als nächstes werden wir uns zwei Projektionen (Abbildung 9a und 9b) des Parameterraums ansehen, um eine Idee darüber zu erhalten, wie sich die Anzahl der stabilen Fixpunkte in Abhängigkeit der gewählten Parameter ändert. In den folgenden Abbildungen des Parameterraums entspricht die weiße Farbe dem Fall, dass es keine stabilen Fixpunkte für die gewählte Parameterkombination gibt. Blau heisst, es gibt genau einen stabilen Fixpunkt. Grün entspricht zwei stabilen Fixpunkten. Rot entspricht dem Fall mit drei stabilen Fixpunkten. Dabei ist die Anzahl stabiler Fixpunkte als eine maximale Anzahl von stabilen Fixpunkten zu verstehen. Der Grund ist, dass für die Fixpunkte mit $\beta_1^* = \beta_2^*$ (das entspricht den Fällen $\beta_1^p = \beta_2^p$ also Abbildung 18b) die Stabilität von den Vorzeichen der Eigenwerte abhängt. Dabei hängt das Vorzeichen der Eigenwerte (Gleichung(3.5)) nicht nur von den vier Parametern β_1^p , β_2^p , λ_1 und λ_2 ab, sondern sie sind auch von dem Bruch $m = \mu_1 / \mu_2$ abhängig. Das bedeutet: Für eine bestimmte Parameterkombination β_1^p , β_2^p , λ_1 und λ_2 kann es verschiedene mögliche Werte von $m = \mu_1 / \mu_2$ geben, die den Fixpunkt stabil beziehungsweise instabil machen. Im Programm *stab1* wurden solche Fixpunkte als stabil gezählt, wenn mindestens ein Parameter m gefunden wird, für den beide Eigenwerte ein negatives Vorzeichen haben.

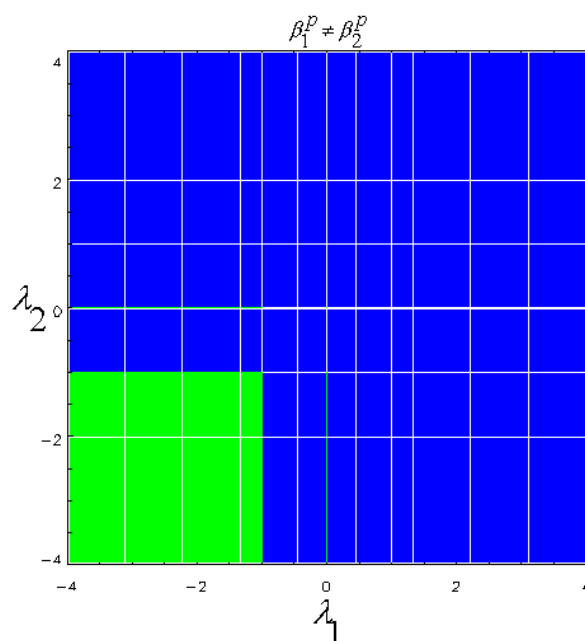


Abbildung 9a

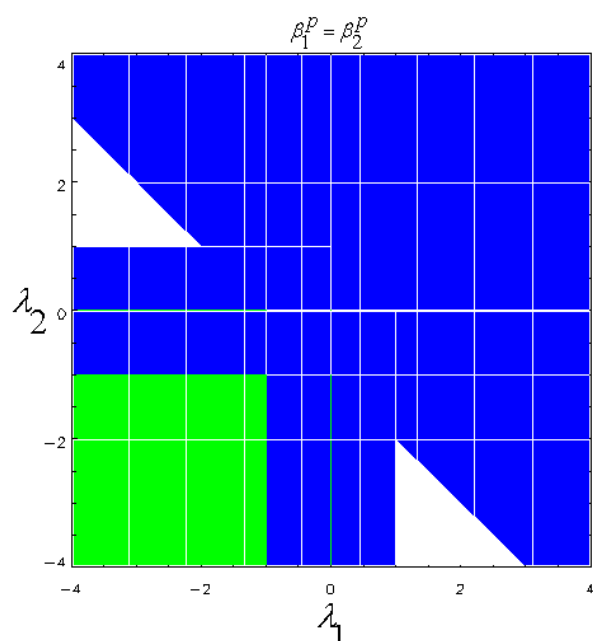


Abbildung 9b

In Abbildung 9a und 9b sind die zwei typischen Muster des Parameterraums des Differentialgleichungssystems (3.1) graphisch dargestellt. Solange die zwei endogenen Präferenzen ungleich sind (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$), und zwar unabhängig davon welche konkreten Werte diese annehmen, erhält man immer eine Abbildung der Form wie in 9a. Wenn die endogenen Präferenzen gleich sind (also $\beta_1^p = \beta_2^p$ mit Ausnahme von $\beta_1^p = \beta_2^p = 1$ und $\beta_1^p = \beta_2^p = 0$), erhält man immer die in Abbildung 9b gezeigte Darstellung. Die sprunghafte, für verschiedene Parameter unveränderbare Form der Abbildung des Parameterraums auf die Anzahl der stabilen Fixpunkte steht im Zusammenhang mit der rein unstetigen rechten Seite des Differentialgleichungssystems (3.1).

Was kann qualitativ über die Form des Parameterraums gesagt werden? Ist die Verteilung der Anzahl der stabilen Fixpunkte auf eine intuitive Weise erklärbar und verständlich? In Abbildung 9a gibt es für alle Parameterkombinationen genau einen stabilen Fixpunkt mit Ausnahme von dem Bereich mit $\lambda_1 < -1$ und $\lambda_2 < -1$. In diesem Bereich beobachtet man, dass es immer zwei stabile Fixpunkte gibt. Das liegt daran, dass in dem grünen Bereich sowohl für den Akteur der Gruppe 1 als auch für den der Gruppe 2 das exogene Potenzial immer stärker als das endogene Potential ist. Das folgt einfach aus der Ungleichung $\lambda_i < -1$ (bzw. $f_i < -\mu_i$). Daraus folgt, dass der erste Term in Gleichung (3.1) betragsmäßig immer (außer für $\beta_1 = \beta_2$) größer ist als der Zweite. Das bedeutet, dass in diesem Bereich sich die Akteure vollständig „sozialorientiert“ verhalten: Sie interessieren sich ausschließlich dafür, was die Nachbargruppe macht, ohne darauf zu achten, was ihre endogenen Präferenzen sind. Die beiden Gruppen stellen Distinktionsgruppen füreinander dar, so dass sie sich möglichst voneinander unterscheiden wollen. Die zwei stabilen Fixpunkte sind immer 1 und 5. Das sind genau die Fixpunkte, wo beide Gruppen ihre Präferenzen am stärksten von der Präferenz der anderen Gruppe entfernen. Bei diesen zwei Fixpunkten erreichen die Gruppen die stärkste Distinktion. Die eine Gruppe würde am liebsten nur von Gut i konsumieren, während die andere Gruppe am liebsten auf dieses Gut ganz verzichten würde. In Abbildung 9b sieht man eine ähnliche Struktur wie bei Abbildung 9a mit dem Unterschied, dass in Abbildung 9b weiße Bereiche existieren (kein stabiler Fixpunkt). In diesen Bereichen entstehen *Randzyklen*, d.h., Zyklen die durch die Randbedingung $\beta_i \in [0,1]$ erzeugt werden. Für Fixpunkte, die von solchen Bereichen im Parameterraum generiert werden, reicht eine infinitesimal kleine Störung, damit die Trajektorie in einen Randzyklus übergeht.

3.1.2 Lsmo2 (2D)

Wir werden nun die zweidimensionale Variante des Systems *Lsmo2* auf Fixpunkte und deren Stabilität untersuchen. Das zu untersuchende Differentialgleichungssystem ist:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot (\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot (\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot (\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} (3.6)$$

Fixpunktanalyse.

Möglich sind nur die neun oben eingeführten Fixpunkte. Mit den entsprechenden Bedingungen werden wir ermitteln, für welche Parameterkombinationen die betrachteten Fixpunkte existieren:

$$1) \vec{\beta}^* = (1,0); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \Rightarrow \beta_1^p \geq 1 + \lambda_1 \text{ und } \beta_2^p \leq -\lambda_2$$

$$2) \bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 0); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \\ \Rightarrow \beta_1^* = \beta_1^p / (1 + \lambda_1) \text{ mit } \beta_1^* \in (0,1) \text{ und } \lambda_2 \beta_1^* + \beta_2^p \leq 0$$

$$3) \bar{\beta}^* = (0,0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \Rightarrow \beta_1^p = \beta_2^p = 0$$

$$4) \bar{\beta}^* = (0, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 \beta_2^* + \beta_1^p \leq 0 \text{ und } \beta_2^* = \beta_2^p / (1 + \lambda_2) \text{ mit } \beta_2^* \in (0,1)$$

$$5) \bar{\beta}^* = (0,1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1^p \leq -\lambda_1 \text{ und } \beta_2^p \geq 1 + \lambda_2$$

$$6) \bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 1); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \\ \Rightarrow \beta_1^* = (\beta_1^p + \lambda_1) / (1 + \lambda_1) \text{ mit } \beta_1^* \in (0,1) \text{ und } -\lambda_2(1 - \beta_1^*) + \beta_2^p - 1 \geq 0$$

$$7) \bar{\beta}^* = (1,1); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1^p = \beta_2^p = 1$$

$$8) \bar{\beta}^* = (1, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 = 0 \\ \Rightarrow -\lambda_1(1 - \beta_2^*) + \beta_1^p - 1 \geq 0 \text{ und } \beta_2^* = (\beta_2^p + \lambda_2) / (1 + \lambda_2) \text{ mit } \beta_2^* \in (0,1)$$

9) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*); \beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0$. Diese Bedingungen gelten für die inneren Fixpunkte. Durch Einsetzen dieser Bedingungen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 \cdot (\beta_1^* - \beta_2^*) + \beta_1^p - \beta_1^* &= 0 \Rightarrow \beta_1^* = ((1 + \lambda_2)\beta_1^p + \lambda_1\beta_2^p) / (\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \\ -\lambda_2 \cdot (\beta_2^* - \beta_1^*) + \beta_2^p - \beta_2^* &= 0 \Rightarrow \beta_2^* = ((1 + \lambda_1)\beta_2^p + \lambda_2\beta_1^p) / (\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \end{aligned} \right\} (3.7)$$

Gilt für beide Komponenten des Fixpunktes die Bedingung $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$, dann existiert der innere Fixpunkt 9. Wenn wir jetzt aber das lineare Differentialgleichungssystem (3.6) ohne die Einschränkung $\beta_i \in [0,1]$ betrachten, dann gilt folgendes für die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems (3.7) in Abhängigkeit der Parameter $\beta_1^p, \beta_2^p, \lambda_1$ und λ_2 : Es kann *genau eine* Lösung geben (falls beide Fixpunkt-komponenten reell sind), *keine* Lösung (wenn β_1 und β_2 divergieren) oder *unendlich viele* Lösungen (falls bei beiden Komponenten der Zähler und der Nenner gleichzeitig verschwinden). In dem eingeschränkten System kann jedoch die divergente Lösung nicht auftreten, weil man das System auf das Intervall $[0,1]$ begrenzt. Demzufolge kann es im eingeschränkten System lediglich eine Lösung geben oder unendlich viele.

Der Fall mit unendlich vielen Lösungen ist ein Spezialfall, der nur auftritt, wenn der Nenner und der Zähler in Gleichung (3.7) gleichzeitig verschwinden. Wenn der Nenner verschwindet, dann gilt $\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0$. Das entspricht der Geraden $\lambda_2 = -\lambda_1 - 1$. Zusätzlich soll der Zähler verschwinden. Das passiert nur falls die endogenen Präferenzen gleich sind, also $\beta_1^p = \beta_2^p$. Zusammenfassend: Es kann unendlich viele Lösungen geben, nur falls die Bedingungen $\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0$ und $\beta_1^p = \beta_2^p$ erfüllt sind.

Stabilitätsanalyse.

Wie beim letzten System interessieren wir uns nur für lokal stabile Fixpunkte. In dem betrachteten System entstehen auch instabile und marginale Fixpunkte. Diese werden wir außer Betracht lassen.

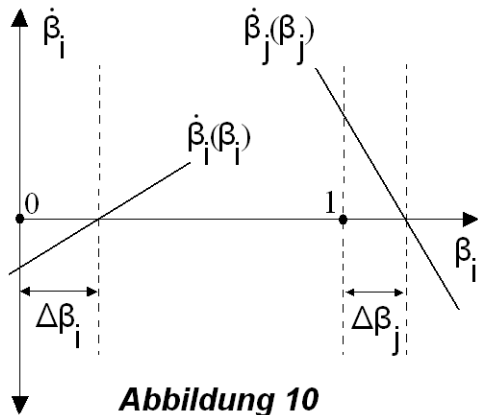


Abbildung 10

Für die Eckenfixpunkte 1 und 5 reicht für die lokale Stabilität die Forderung, dass die Ableitungen $\dot{\beta}_1$ und $\dot{\beta}_2$ ungleich Null an den betrachteten Fixpunkt sind und dass sie das Vorzeichen haben, das durch die Ungleichungen der Fixpunktanalyse festgelegt ist. Warum diese einfache Bedingung zu einem stabilen Fixpunkt führt, kann man anhand einer Skizze schnell begreifen. Sehen wir uns Abbildung 10 an. Nach dem Differentialgleichungssystem (3.6) ist die Ableitung $\dot{\beta}_i(\beta_i)$ gegeben durch:

$$\dot{\beta}_i = -(f_i + \mu_i)\beta_i + f_i\beta_j + \mu_i\beta_i^p$$

Es handelt sich um eine Gerade, die in Abbildung 10 eingezeichnet ist. Beispielhaft zeigt die genannte Abbildung, dass wenn wir den Fixpunkt 5 betrachten (also $\vec{\beta}^* = (\beta_i^*, \beta_j^*) = (0,1)$), die Forderung $\dot{\beta}_i(\beta_i^* = 0) < 0$ und $\dot{\beta}_j(\beta_j^* = 1) > 0$ ausreicht, damit endliche Bereiche $\Delta\beta_i$ um β_i^* bzw. $\Delta\beta_j$ um β_j^* entstehen, in denen der Fixpunkt $\vec{\beta}^* = (0,1)$ sich stabil verhält. Das bedeutet, dass die Forderung $\dot{\beta}_1 > 0$ und $\dot{\beta}_2 < 0$ für den Fixpunkt 1 $\vec{\beta}^* = (1,0)$ und die Forderung $\dot{\beta}_1 < 0$ und $\dot{\beta}_2 > 0$ für den Fixpunkt 5 $\vec{\beta}^* = (0,1)$ unvermeidlich die lokale Stabilität der Fixpunkte verursachen.

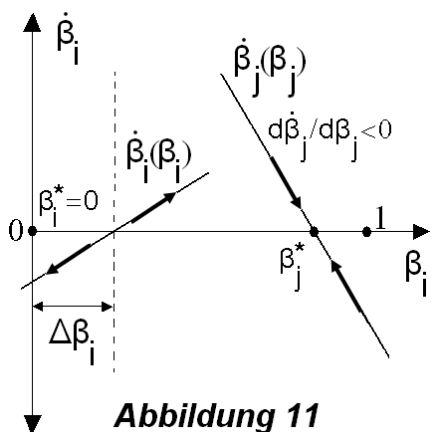


Abbildung 11

Für die Kantenfixpunkte 2, 4, 6 und 8 können wir eine ähnliche Überlegung anstellen. Betrachten wir Abbildung 11. Bei den Kantenfixpunkten gibt es immer eine Komponente β_i^* mit $\dot{\beta}_i \leq$ bzw. ≥ 0 und eine andere Komponente $\beta_j^* \in (0,1)$ mit $\dot{\beta}_j = 0$. Für die Komponente β_i^* gilt die obige Überlegung: Der Fixpunkt $\vec{\beta}^*$ ist in i -Richtung in einem Bereich $\Delta\beta_i$ stabil falls für die Komponente β_i^* die Ungleichung $\dot{\beta}_i <$ bzw. > 0 gilt. Für die andere Komponente $\beta_j^* \in (0,1)$ mit $\dot{\beta}_j = 0$ soll die Ungleichung

$d\dot{\beta}_j / d\beta_j = -(f_j + \mu_j) < 0 \Leftrightarrow \lambda_j > -1$ gelten. Zusammenfassend: Kantenfixpunkte sind stabil vorausgesetzt, dass für die Komponente β_i^* die Bedingung $\dot{\beta}_i <$ bzw. > 0 (je nach dem, ob $\beta_i^* = 0$ bzw. 1 ist) und für die Komponente $\beta_j^* \in (0,1)$ mit $\dot{\beta}_j = 0$ die Bedingung $\lambda_j > -1$ erfüllt ist.

Die Fixpunkte 3 und 7 können wir als innere Fixpunkte betrachten, weil ihre Ableitung genau gleich Null ist. Die inneren Fixpunkte 3, 7 und 9 können also durch eine gewöhnliche Stabilitätsanalyse untersucht werden. Mit Hilfe der Jacobi-Matrix können wir

das charakteristische Polynom und seine Eigenwerte ausrechnen. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\omega^2 + \Psi\omega + \Xi = 0 \quad (3.8)$$

mit $\Psi = f_1 + f_2 + \mu_1 + \mu_2$ und $\Xi = f_1\mu_2 + f_2\mu_1 + \mu_1\mu_2$.

Die Parameter ω sind die Eigenwerte des Systems (3.6). Aus dem charakteristischen Polynom ergibt sich:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}[-(1 + \lambda_1)\mu_1 - (1 + \lambda_2)\mu_2 \pm \sqrt{((1 + \lambda_1)\mu_1 + (1 + \lambda_2)\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}]$$

oder auch

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\mu_2[-(1 + \lambda_1)m - (1 + \lambda_2) \pm \sqrt{((1 + \lambda_1)m + (1 + \lambda_2))^2 - 4m(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}] \quad (3.9)$$

mit $m = \mu_1 / \mu_2$. Diejenigen Parameterkombinationen, die den Realteil der beiden Eigenwerte negativ machen, erzeugen lokal stabile Fixpunkte. Die Lage (Gleichung (3.7)) eines inneren Fixpunktes $\vec{\beta}^*$ wird durch die vier Parameter β_1^p , β_2^p , λ_1 und λ_2 bestimmt, während seine Stabilität (Gleichung (3.9)) von λ_1 , λ_2 und m bestimmt wird.

Der Fall mit unendlich vielen Lösungen (also für $\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0$ und $\beta_1^p = \beta_2^p$) verhält sich wie ein marginaler Fixpunkt. Störungen bleiben beliebig lange erhalten. Daher lassen wir diese Fixpunkte bei der Stabilitätsanalyse außer Betracht.

Wir haben die neun möglichen Fixpunkte auf ihre Stabilität untersucht. Das Programm *stab2* enthält die beschriebene Stabilitätsanalyse für das betrachtete Differentialgleichungssystem (3.6). Es wurde in der Sprache PV-Wave programmiert und befindet sich im Appendix unter Code 6 (unter Codes).

Nun betrachten wir in Abbildung 12a und 12b zwei Projektionen des Parameterraums. Diese Ausschnitte des Parameterraums wurden für die gleichen Werte der endogenen

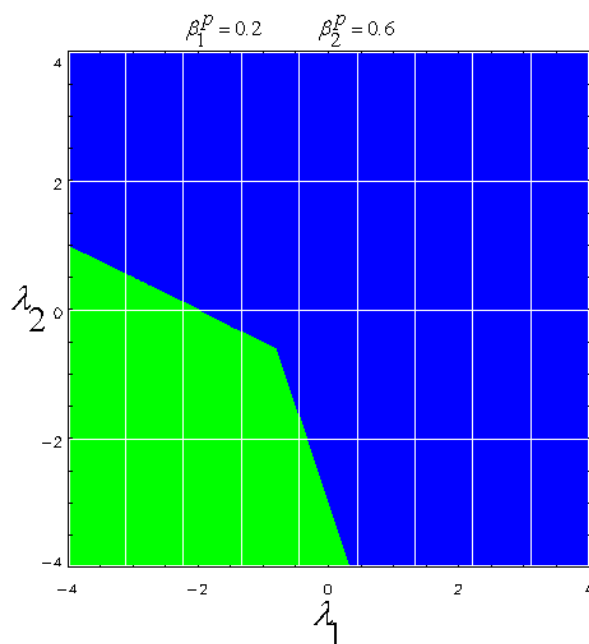


Abbildung 12a

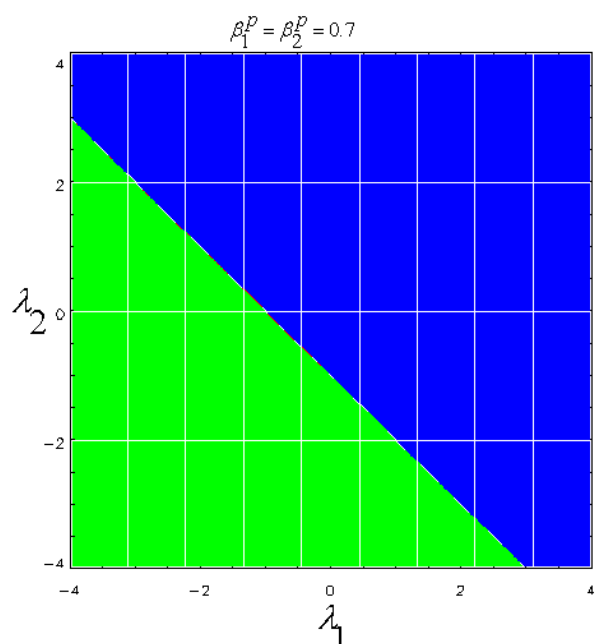


Abbildung 12b

Präferenzen β_1^p und β_2^p wie Abbildung 9a und 9b ermittelt. Auf diese Weise bleiben die Projektionen der verschiedenen Systeme miteinander vergleichbar. Weiße Bereiche entsprechen Parameterkombinationen $\beta_1^p, \beta_2^p, \lambda_1$ und λ_2 , die keine stabilen Fixpunkte generieren. Blau gilt für diejenigen Parameterkombinationen die genau einen stabilen Fixpunkt erzeugen. Grün für zwei, und rot für drei. Die Darstellung ist als eine maximale Anzahl von stabilen Fixpunkten zu verstehen. Wird mindestens ein Wert von m gefunden, der einen betrachteten inneren Fixpunkt stabil macht, so wird der innere Fixpunkt als stabil gezählt.

In Abbildung 12a und 12b sind zwei typische Muster des Parameterraums dargestellt. Abbildung 12a zeigt qualitativ eine ähnliche Struktur wie in Abbildung 9a. Für unterschiedliche endogene Präferenzen (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$) ergibt sich immer eine Darstellung dieser Form. Je größer der Unterschied zwischen den endogenen Präferenzen ist, umso mehr ähnelt der grüne Bereich einem Quadrat. Wenn der Unterschied zwischen den endogenen Präferenzen genau Eins ist, wird aus dem grünen Bereich ein Quadrat. Wenn die endogenen Präferenzen gleich sind (also $\beta_1^p = \beta_2^p$), dann ergibt sich die in Abbildung 12b gezeigte Darstellung. Der blaue Bereich ist durch die Gerade $\lambda_2 = -\lambda_1 - 1$ von dem grünen Bereich getrennt.

Was können wir nun über die Verteilung der stabilen Fixpunkte des Systems (3.6) sagen? Im grünen Bereich, wo mindestens einer der Gruppen eine Distinktionsgruppe für die andere darstellt, sind oft genau so wie im vorherigen System (3.1) die Fixpunkte 1 und 5 zu finden. Erinnern wir uns daran, dass diese beiden Fixpunkte den stärksten Präferenzenunterschied überhaupt darstellen. Im grünen Bereich herrscht meistens die stärkste Abstoßung zwischen den beiden Gruppen. Das führt dazu, dass nur in diesem Bereich die Fixpunkte 1 und 5 als stabile Fixpunkte auftreten können. In dem blauen Bereich, wo $\lambda_i < 0$ und $\lambda_j > 0$ gilt, treten meistens die Kantenfixpunkte 2, 4, 6 und 8 auf. Im blauen Bereich mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j > 0$ treten meistens innere Fixpunkte 9 auf. In diesem Bereich stellen beide Gruppen Aspirationsgruppen füreinander dar. Die Abbildungen 9a und 9b (Model *Lsmo1*, s. Gl. (3.1)) und Abbildungen 12a und 12b (Model *Lsmo2*, s. Gl. (3.6)) weisen eine qualitativ ähnliche Struktur auf. Trotz der quantitativen Unterschiede führen die Modelle *Lsmo1* und *Lsmo2* sehr häufig zu qualitativ identischen Ergebnissen.

3.1.3 Lsmo3 (2D)

In diesem Abschnitt werden wir die zweidimensionale Variante des Systems *Lsmo3* auf Fixpunkte und deren Stabilität untersuchen. Das Differentialgleichungssystem lautet:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot \sigma(\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot (\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot \sigma(\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot (\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} (3.10)$$

Fixpunktanalyse.

Nun werden wir die Bedingungen für die Existenz der gewöhnlichen Fixpunkte untersuchen. Wir erhalten für die verschiedenen Fixpunkte die folgenden Ergebnisse:

$$1) \vec{\beta}^* = (1,0); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \Rightarrow \beta_1^p - \lambda_1 \geq 1 \text{ und } \beta_2^p + \lambda_2 \leq 0$$

$$2) \vec{\beta}^* = (\beta_1^*, 0); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \\ \Rightarrow \beta_1^* = \beta_1^p - \lambda_1 \text{ mit } \beta_1^* \in (0,1) \text{ und } \lambda_2 \leq -\beta_2^p$$

$$3) \bar{\beta}^* = (0,0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \Rightarrow \beta_1^p = \beta_2^p = 0$$

$$4) \bar{\beta}^* = (0, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 \leq -\beta_1^p \text{ und } \beta_2^* = \beta_2^p - \lambda_2 \text{ mit } \beta_2^* \in (0,1)$$

$$5) \bar{\beta}^* = (0,1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1^p \leq -\lambda_1 \text{ und } \beta_2^p \geq 1 + \lambda_2$$

$$6) \bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 1); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \\ \Rightarrow \beta_1^* = \beta_1^p + \lambda_1 \text{ mit } \beta_1^* \in (0,1) \text{ und } \beta_2^p \geq 1 + \lambda_2$$

$$7) \bar{\beta}^* = (1,1); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1^p = \beta_2^p = 1$$

$$8) \bar{\beta}^* = (1, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 = 0 \\ \Rightarrow \beta_1^p \geq 1 + \lambda_1 \text{ und } \beta_2^* = \beta_2^p + \lambda_2 \text{ mit } \beta_2^* \in (0,1)$$

9) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*); \beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0$. Diese Bedingungen gelten für die inneren Fixpunkte. Durch Ersetzen dieser Bedingungen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 \cdot \sigma(\beta_1^* - \beta_2^*) + \beta_1^p - \beta_1^* &= 0 \\ -\lambda_2 \cdot \sigma(\beta_2^* - \beta_1^*) + \beta_2^p - \beta_2^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung für die Signumfunktion in Gleichung (3.11) machen. Der Phasenraum (siehe Abbildung 7) wird damit in drei Bereichen durch die Diagonale $\beta_2 = \beta_1$ unterteilt. Die drei Bereiche sind $\beta_2 < \beta_1$, $\beta_2 = \beta_1$ und $\beta_2 > \beta_1$.

1. Für den ersten Bereich $\beta_2 < \beta_1$ (das entspricht der unteren Hälfte des quadratischen Phasenraums unter der Geraden $\beta_2 = \beta_1$) erhalten wir folgendes:

$$\bar{\beta}^* = (\beta_1^p - \lambda_1, \beta_2^p + \lambda_2) \quad (3.12) \\ \text{mit } \beta_2^* < \beta_1^* \Leftrightarrow \beta_1^p - \beta_2^p > \lambda_1 + \lambda_2$$

Das heisst, der Fixpunkt (3.12) existiert, wenn die Bedingung in der zweiten Zeile erfüllt ist. Diesen Fixpunkt werden wir als Fixpunkt 9a bezeichnen.

2. Für den Bereich $\beta_2 = \beta_1$ (das entspricht genau der Geraden, die den Phasenraum in zwei Hälften teilt) erhalten wir folgendes:

$$\bar{\beta}^* = (\beta_1^p, \beta_2^p) \quad (3.13) \\ \text{mit } \beta_2^* = \beta_1^* \Leftrightarrow \beta_1^p = \beta_2^p$$

Der Fixpunkt (3.13) existiert nur, wenn die Gleichheit in der zweiten Zeile erfüllt ist, das heisst, wenn die endogenen Präferenzen gleich sind. Diesen Fixpunkt bezeichnen wir als Fixpunkt 9b.

3. Für den Bereich $\beta_2 > \beta_1$ (das entspricht der oberen Hälfte des Phasenrums oberhalb der Geraden $\beta_2 = \beta_1$ in Abbildung 7) erhalten wir:

$$\bar{\beta}^* = (\beta_1^p + \lambda_1, \beta_2^p - \lambda_2) \quad (3.14)$$

$$\text{mit } \beta_2^* > \beta_1^* \Leftrightarrow \beta_2^p - \beta_1^p > \lambda_1 + \lambda_2$$

Der Fixpunkt (3.14) existiert somit nur, wenn die Ungleichung in der zweiten Zeile erfüllt ist. Diesen Fixpunkt bezeichnen wir als Fixpunkt 9c.

Jetzt haben wir das Differentialgleichungssystem (3.10) auf gewöhnliche Fixpunkte untersucht. Wenn wir uns aber die Gleichungen in (3.10) genauer betrachten, beobachten wir, dass man geradeso wie im unstetigen System (3.1) unter gewissen Umständen Konvergenzpunkte erhalten kann. Wir werden nun die Bedingungen untersuchen, unter denen die Konvergenzpunkte auftreten.

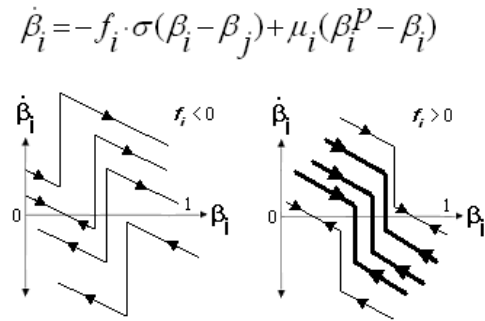


Abbildung 13

In Abbildung 13 können wir sehen, wie die erste Art von Konvergenzpunkten entsteht. Auf der linken Seite ist die Form der Ableitung $\dot{\beta}_i$ für negative Werte von f_i dargestellt. In diesem Fall kann offensichtlich kein Konvergenzpunkt auftreten. Auf der rechten Seite der Abbildung ist die Form dieser Funktion für positive Werte von f_i dargestellt. Für die dick gezeichneten Linien der Funktion treten Konvergenzpunkte auf. Auf der Sprungstelle der Signumfunktion ist die Ableitung $\dot{\beta}_i$ ungleich Null,

wenn die endogenen Präferenzen ungleich sind (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$). Diese Bedingung ist notwendig für die Entstehung von Konvergenzpunkten. Zunächst betrachten wir $f_1 > 0$ und $f_2 > 0$ (bzw. $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$). Dann können wir die Bedingung für das Auftreten solcher unstetigen Fixpunkte so formulieren:

$$\dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_j + \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow -f_i \cdot \sigma(\beta_j - \beta_j + \varepsilon) + \mu_i(\beta_i^p - \beta_j - \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow$$

$$-f_i + \mu_i(\beta_i^p - \beta_j - \varepsilon) < 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -f_i + \mu_i(\beta_i^p - \beta_j) < 0 \Leftrightarrow \beta_j > \beta_i^p - \lambda_i$$

$$\dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_j - \varepsilon) > 0 \Leftrightarrow -f_i \cdot \sigma(\beta_j - \beta_j - \varepsilon) + \mu_i(\beta_i^p - \beta_j + \varepsilon) > 0$$

$$\Leftrightarrow f_i + \mu_i(\beta_i^p - \beta_j + \varepsilon) > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f_i + \mu_i(\beta_i^p - \beta_j) > 0 \Leftrightarrow \beta_j < \beta_i^p + \lambda_i$$

Dasselbe gilt für die Ableitung $\dot{\beta}_j$:

$$\dot{\beta}_j(\beta_j = \beta_i + \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow \beta_i > \beta_j^p - \lambda_j$$

$$\dot{\beta}_j(\beta_j = \beta_i - \varepsilon) > 0 \Leftrightarrow \beta_i < \beta_j^p + \lambda_j$$

Wir können also schreiben: $\beta_2^p - \lambda_2 < \beta_1 < \beta_2^p + \lambda_2$ und $\beta_1^p - \lambda_1 < \beta_2 < \beta_1^p + \lambda_1$. Diese erste Art von Konvergenzpunkten existiert nur dann, wenn sich die angegebenen Intervalle $(\beta_2^p - \lambda_2, \beta_2^p + \lambda_2)$ und $(\beta_1^p - \lambda_1, \beta_1^p + \lambda_1)$ im Bereich $[0,1]$ überlappen. Damit

können wir alle Voraussetzungen zusammenfassen, die erforderlich sind, damit diese erste Art von Konvergenzpunkten auftritt:

$$\Rightarrow \beta_1^p \neq \beta_2^p, \lambda_1 > 0 \text{ und } \lambda_2 > 0, \beta_2^p - \lambda_2 < \beta_1 < \beta_2^p + \lambda_2 \text{ und } \beta_1^p - \lambda_1 < \beta_2 < \beta_1^p + \lambda_1$$

Es ist zu beachten, dass bei solchen Fixpunkten beide f_i -Werte positiv sind. Das bedeutet, dass beide Gruppen Aspirationsgruppen füreinander darstellen. Diese Art von Fixpunkten tritt auf, wenn sich diese Gruppen ständig überholen. Da die beiden Gruppen ständig in Bewegung sind, kann ein solches Phänomen streng genommen nicht als ein Fixpunkt angesehen werden. Aber diese ständige sprunghafte Zick-Zack-Bewegung um die Sprungstelle der Signumfunktion findet immer in einem infinitesimal kleinen Bereich des Phasenraums statt.

In diesem Modell kommen aber auch die Punkte 3 und 7 des Phasenraums (siehe Abbildung 7) als Konvergenzpunkte vor. Nun werden wir uns anschauen, welche Bedingungen dazu führen, dass diese auftreten können. Es soll für beide Fälle gelten, dass die endogenen Präferenzen ungleich sind (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$). Falls diese gleich sind, erhalten wir sofort die gewöhnlichen Fixpunkte 3 und 7. Wir werden mit dem Konvergenzpunkt 3 anfangen und dann werden wir den Konvergenzpunkt 7 untersuchen:

1. Betrachten wir den Punkt 3 des Phasenraums. Das entspricht dem Punkt $\vec{\beta} = (0,0)$. Nehmen wir an, die Gruppe j stellt für die Gruppe i eine Distinktionsgruppe dar (das heißt $\lambda_i < 0$), während die Gruppe i bezüglich Gruppe j eine Aspirationsgruppe darstellt (das heißt $\lambda_j > 0$). Erinnern wir uns daran, dass alle β -Werte im Intervall $[0,1]$ eingeschränkt sind. Nun, wenn die Gruppe j als Verfolger (oder Nachmacher) und die Gruppe i als Verfolgte (Pioneer-Gruppe) gilt, welche Bedingungen führen dazu, dass die beiden Gruppen in einem infinitesimal kleinen Bereich um den Punkt 3 des Phasenraums „gefangen“ bleiben? Es sind die folgenden Bedingungen:

Erstens soll gelten:

$$\dot{\beta}_i(0,0) < \dot{\beta}_j(0,0) \Leftrightarrow \mu_i \beta_i^p < \mu_j \beta_j^p$$

Um die zweite Bedingung abzuleiten, betrachten wir $\beta_i(t') = 0$ und $\beta_j(t') = 0$.

$$\beta_i(t'+dt) = dt \cdot \dot{\beta}_i(0,0) + \beta_i(t') \Rightarrow \beta_i(t'+dt) = dt \cdot \dot{\beta}_i(0,0) \Rightarrow \beta_i(t'+dt) = dt \cdot \mu_i \beta_i^p$$

$$\beta_j(t'+dt) = dt \cdot \dot{\beta}_j(0,0) + \beta_j(t') \Rightarrow \beta_j(t'+dt) = dt \cdot \dot{\beta}_j(0,0) \Rightarrow \beta_j(t'+dt) = dt \cdot \mu_j \beta_j^p$$

Dann sollen als weitere Bedingungen folgende Ungleichungen gelten:

$$\dot{\beta}_i(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) = -f_i + \mu_i(\beta_i^p - dt \cdot \mu_i \beta_i^p) < 0$$

$$\dot{\beta}_j(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) = -f_j + \mu_j(\beta_j^p - dt \cdot \mu_j \beta_j^p) < 0$$

Wenn wir jetzt dt gegen Null gehen lassen, können wir diese Ungleichungen in folgender Form schreiben:

$$-\lambda_i + \beta_i^p < 0 \text{ bzw. } -\lambda_j + \beta_j^p < 0 \text{ mit } \lambda_i < 0 \text{ und } \lambda_j > 0.$$

Zusammenfassend: Der Punkt 3 des Phasenraums ist ein Konvergenzpunkt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\beta_1^p \neq \beta_2^p, \mu_i \beta_i^p < \mu_j \beta_j^p, -\lambda_i + \beta_i^p < 0 \text{ und } -\lambda_j + \beta_j^p < 0 \text{ mit } \lambda_i < 0 \text{ und } \lambda_j > 0.$$

2. Betrachten wir jetzt den Punkt 7 des Phasenraums. Es handelt sich also um den Punkt $\vec{\beta} = (1,1)$. Die Bedingungen $\lambda_i < 0$ und $\lambda_j > 0$ sollen weiterhin gelten. Wenn das gilt, welche Bedingungen führen dazu, dass die beiden Gruppen in einem infinitesimal kleinen Bereich um den Punkt 7 des Phasenraums „gefangen“ bleiben? Es sind die folgenden Bedingungen:

Erstens soll gelten:

$$\dot{\beta}_i(1,1) > \dot{\beta}_j(1,1) \Leftrightarrow \mu_i(\beta_i^p - 1) > \mu_j(\beta_j^p - 1)$$

Um die zweite Bedingung abzuleiten, betrachten wir $\beta_i(t') = 1$ und $\beta_j(t') = 1$.

$$\beta_i(t'+dt) = dt \cdot \dot{\beta}_i(1,1) + \beta_i(t') \Rightarrow \beta_i(t'+dt) = dt \cdot \mu_i(\beta_i^p - 1) + 1$$

$$\beta_j(t'+dt) = dt \cdot \dot{\beta}_j(1,1) + \beta_j(t') \Rightarrow \beta_j(t'+dt) = dt \cdot \mu_j(\beta_j^p - 1) + 1$$

Dann sollen als weitere Bedingungen folgende Ungleichungen gelten:

$$\dot{\beta}_i(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) = -f_i + \mu_i(\beta_i^p - 1 - dt \cdot \mu_i(\beta_i^p - 1)) > 0$$

$$\dot{\beta}_j(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) = -f_j + \mu_j(\beta_j^p - 1 - dt \cdot \mu_j(\beta_j^p - 1)) > 0$$

Wenn wir jetzt dt gegen Null gehen lassen, können wir diese Ungleichungen in folgender Form schreiben:

$$-\lambda_i + \beta_i^p - 1 > 0 \text{ bzw. } -\lambda_j + \beta_j^p - 1 > 0 \text{ mit } \lambda_i < 0 \text{ und } \lambda_j > 0.$$

Zusammenfassend: Der Punkt 7 des Phasenraums ist ein Konvergenzpunkt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\beta_1^p \neq \beta_2^p, \quad \mu_i(\beta_i^p - 1) > \mu_j(\beta_j^p - 1), \quad -\lambda_i + \beta_i^p - 1 > 0 \text{ und } -\lambda_j + \beta_j^p - 1 > 0 \text{ mit } \lambda_i < 0 \text{ und } \lambda_j > 0.$$

Stabilitätsanalyse.

Wir werden jetzt die Bedingungen ermitteln, unter denen die unterschiedlichen Fixpunkte ein stabiles Verhalten aufweisen.

Wann sind die Eckenfixpunkte 1 und 5 stabil? Hier gilt das gleiche Kriterium wie für das System (3.6). Wenn man die Gleichheitszeichen der Ungleichungen $\dot{\beta}_i \geq 0$ und $\dot{\beta}_j \leq 0$ (Ungleichungen für die Existenz der Fixpunkte) weglässt, dann entstehen unvermeidlich endliche Bereiche, in den der betrachtete Fixpunkt ein stabiles Verhalten hat.

Wann sind die Kantenfixpunkte 2, 4, 6 und 8 lokal stabil? Die Stabilitätsbedingung für die Kantenfixpunkte des Systems (3.6) ist auch für das System (3.10) gültig. Der betrachtete Fixpunkt hat immer eine Komponente mit $\dot{\beta}_i \geq 0$ bzw. $\dot{\beta}_i \leq 0$. Für diese Komponente soll die obige Bedingung (wie für 1 und 5) gelten. Der Fixpunkt ist in Richtung der Komponente i stabil, wenn wir die Gleichheitszeichen weglassen, also wenn es $\dot{\beta}_i > 0$ und $\dot{\beta}_i < 0$ gilt. Es gibt dann eine Komponente des Fixpunktes, für die gilt $\dot{\beta}_j = 0$. Der Fixpunkt ist dann in Richtung j stabil, wenn $d\dot{\beta}_j / d\beta_j = -\mu_j < 0$ erfüllt ist. Und diese Bedingung ist immer erfüllt, weil μ_j nur positive Werte annehmen kann.

Wann sind die Fixpunkte 9a und 9b stabil? Diese Frage lässt sich durch eine gewöhnliche Eigenwertrechnung beantworten. Das charakteristische Polynom für innere Fixpunkte mit $\beta_1^* \neq \beta_2^*$ bzw. $\beta_1^p \neq \beta_2^p$ ist:

$$(\omega + \mu_1) \cdot (\omega + \mu_2) = 0 \Rightarrow \omega_1 = -\mu_1 \text{ und } \omega_2 = -\mu_2$$

Alle Fixpunkte 9a und 9b sind lokal stabil, für die die beiden Eigenwerte ω_1 und ω_2 negativ sind. Das ist immer der Fall, weil die Parameter μ_j nur positive Werte annehmen können. Alle inneren Fixpunkte 9a und 9b sind lokal stabil.

Die Fixpunkte 3 und 7 können als innere Fixpunkte angesehen werden, weil auf diesen Fixpunkten die Ableitungen der Präferenzen verschwinden. Die inneren Fixpunkte 3, 7 und 9 können also durch die gleiche Stabilitätsanalyse untersucht werden. Bei allen drei Fixpunkten gilt $\beta_1^* = \beta_2^*$ bzw. $\beta_1^p = \beta_2^p$. Wir befinden uns also genau auf der Unstetigkeit des Systems (3.10). Das System kann wie für *Lsmo1* durch ein Tangens Hyperbolicus linearisiert werden. Aus dem linearisierten System kann man die Eigenwerte ermitteln. Wir nutzen den Ansatz (3.3). Die Linearisierung des Systems (3.10) ist:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot a(\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot (\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot a(\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot (\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} (3.15)$$

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix können wir das charakteristische Polynom und die Eigenwerte des Systems ermitteln. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\omega^2 + \Psi\omega + \Xi = 0 \quad (3.16)$$

mit $\Psi = a(f_1 + f_2) + \mu_1 + \mu_2$ und $\Xi = a(f_1\mu_2 + f_2\mu_1) + \mu_1\mu_2$.

Die Parameter ω sind die Eigenwerte des Systems und es gilt:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}[-(1 + a\lambda_1)\mu_1 - (1 + a\lambda_2)\mu_2 \pm \sqrt{((1 + a\lambda_1)\mu_1 + (1 + a\lambda_2)\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_2(a(\lambda_1 + \lambda_2) + 1)}]$$

oder auch

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\mu_2[-(1 + a\lambda_1)m - (1 + a\lambda_2) \pm \sqrt{((1 + a\lambda_1)m + (1 + a\lambda_2))^2 - 4m(a\lambda_1 + a\lambda_2 + 1)}]$$

mit $m = \mu_1 / \mu_2$. Man beachte, dass nur wenn a gegen unendlich strebt, die Eigenwerte des linearisierten Systems gegen die des nichtlinearisierten Systems (3.10) konvergieren. Diejenigen Parameterkombinationen, die den Realteil der beiden Eigenwerte negativ machen, generieren lokal stabile Fixpunkte. Betrachtet man die obige Gleichung in ihrem Grenzwert für a gegen unendlich, konvergiert ein Eigenwert gegen 0 während der zweite, je nach den Werten von λ_1 und λ_2 , gegen $-\infty$ oder $+\infty$ geht. Ist letzteres der Fall, handelt es sich garantiert um einen instabilen Fixpunkt. Für den Fall gegen $-\infty$ müsste man dagegen auf einen marginalen Fixpunkt schließen (der andere Eigenwert strebt gegen 0). Hier haben jedoch ausführliche numerische Experimente gezeigt, dass sich das System stabil verhält. Wir können daraus schließen, dass die übliche Näherung des Tangens Hyperbolicus nur bis zur ersten Ordnung das lokale Systemverhalten adäquat beschreibt (anschaulich bedeutet dies, dass die „Ecken“ der Signumfunktion auch lokal eine wichtige, nicht zu vernachlässigende Bedeutung haben). Bei den folgenden Analysen wird deshalb auf die numerischen Resultate zurückgegriffen.

Wann sind die Konvergenzpunkte stabil?

Wie man in Abbildung 13 leicht sieht, die Konvergenzpunkte mit $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ sind immer stabil. Das liegt daran, dass infinitesimal kleine Ablenkungen um die Sprungstelle

β_j^* der Signumfunktion zu Bereichen der Ableitung von $\dot{\beta}_i$ führen, die die erzeugte Störung in Richtung β_j^* immer kleiner machen.

Jetzt untersuchen wir die Stabilität der Konvergenzpunkte $\vec{\beta} = (0,0)$ und $\vec{\beta} = (1,1)$. Diese beiden Konvergenzpunkte existieren immer, solange ihre entsprechenden Bedingungen erfüllt sind. Das bedeutet: für den Konvergenzpunkt $\vec{\beta} = (0,0)$ gelten die Bedingungen $\dot{\beta}_i(0,0) < \dot{\beta}_j(0,0)$, $\dot{\beta}_i(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) < 0$ und $\dot{\beta}_j(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) < 0$. Für infinitesimal kleine Störungen bleiben diese Bedingungen unverändert. Der Grund ist, dass der Wert der Grössen in den Ungleichungen endlich gross ist. Damit können infinitesimal kleine Störungen ihre Gültigkeit nicht verletzen. Sie mögen nicht für beliebig große Störungen erfüllt sein, aber wenn die Ablenkung bzw. die Veränderung der Bedingungen infinitesimal klein ist, bleiben sie mit Sicherheit erfüllt. Für den Konvergenzpunkt $\vec{\beta} = (1,1)$ setzen wir die Bedingungen $\dot{\beta}_i(1,1) > \dot{\beta}_j(1,1)$, $\dot{\beta}_i(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) > 0$ und $\dot{\beta}_j(\beta_i(t'+dt), \beta_j(t'+dt)) > 0$ voraus. Die Gültigkeit der Bedingungen bleibt offensichtlich für infinitesimal kleine Störungen (aus dem gleichen Grund wie für den vorherigen Konvergenzpunkt) erhalten. Die beiden Fixpunkte $\vec{\beta} = (0,0)$ und $\vec{\beta} = (1,1)$ sind also immer lokal stabil.

Wir haben nun alle gewöhnlichen Fixpunkte und Konvergenzpunkte auf ihre Stabilität untersucht. Das Programm *stab3* enthält die beschriebene Stabilitätsanalyse für das betrachtete Differentialgleichungssystem (3.10). Es wurde in der Sprache PV-Wave programmiert und befindet sich im Appendix unter Code 7 (unter Codes).

Betrachten wir jetzt Projektionen des Parameterraums. Die Abbildungen 14a und Abbildung 14b stellen die maximale Anzahl der stabilen Fixpunkte in Abhängigkeit von den gewählten Parametern β_1^p , β_2^p , λ_1 und λ_2 dar. Weiß bedeutet keine stabilen Fixpunkte, blau einen, grün zwei und rot drei. Wir betrachten die maximale Anzahl stabiler Fixpunkte unter den schon für *Lsmo1* und *Lsmo2* beschriebenen Bedingungen.

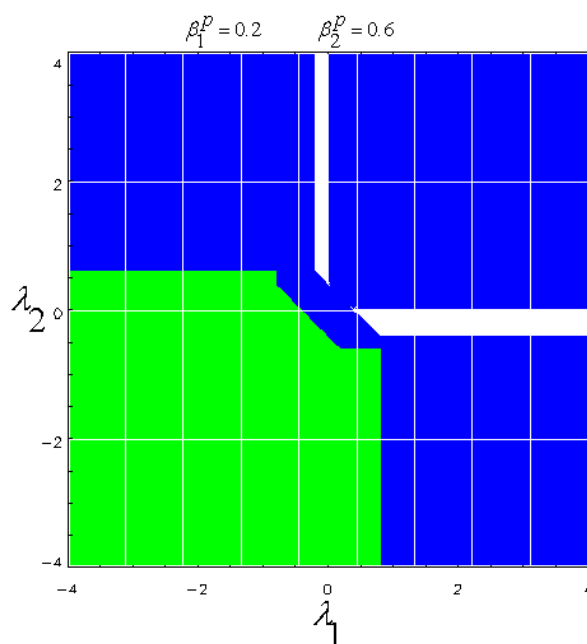


Abbildung 14a

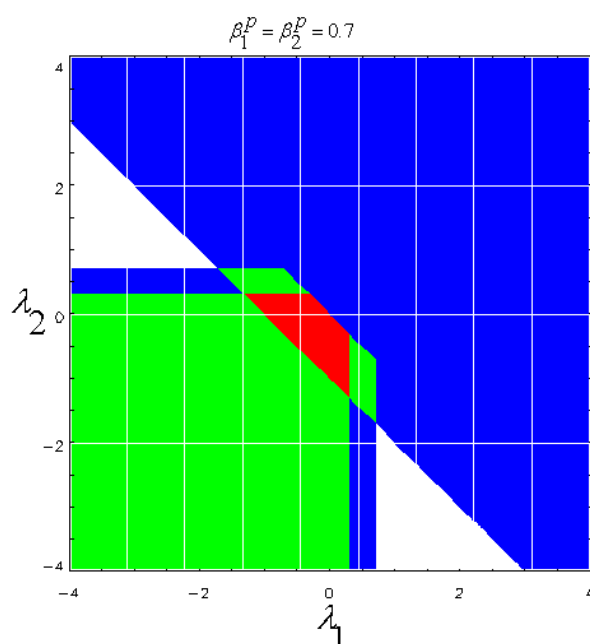


Abbildung 14b

In Abbildung 14a sieht man die qualitativ gesehen charakteristische Projektion des Parameterraums für ungleiche Werte der endogenen Präferenzen (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$). Nimmt man verschiedene Werte für die endogenen Präferenzen als die in Abbildung 14a, so verändert sich quantitativ leicht die Darstellung. Ihre Eigenschaften bleiben aber qualitativ gleich. In Abbildung 14a entstehen die weißen Bereiche nicht als eine Eigenschaft des Systems (3.10), da für diese Parameterkombinationen wahrscheinlich Fixpunkte existieren (und zwar genau ein Konvergenzpunkt). Es war aber im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, die Bedingungen zu formulieren, die für die Entstehung der Fixpunkte dieser Bereiche notwendig sind. In Abbildung 14b sieht man eine qualitativ gesehen charakteristische Projektion des Parameterraums für gleiche Werte der endogenen Präferenzen ($\beta_1^p = \beta_2^p$). Verändert man die Werte der endogenen Präferenzen, so verändert sich quantitativ leicht die Darstellung in Abb. 14b. Ihre Eigenschaften bleiben aber qualitativ gleich.

Was können wir jetzt über die Verteilung der stabilen Fixpunkte sagen? Trotz der quantitativen Abweichungen der Ergebnisse von System (3.1), (3.6) und (3.10) sieht man klar, dass Abbildung 14a qualitativ ähnliche Resultate liefert wie 9a und 12a. Die höchste Anzahl von stabilen Fixpunkten befindet sich im Bereich, wo sowohl λ_1 als auch λ_2 negativ sind. In diesem Bereich sind auch bei allen drei Systemen die Fixpunkte 1 und 5 zu finden. In Abbildung 14b beobachtet man eine ähnliche Struktur wie in Abbildung 9b (*Lsmo1*, s. Gl. (3.1)). Es gibt ebenfalls eine Gemeinsamkeit zwischen Abbildung 14b und Abbildung 12b (*Lsmo2*, s. Gl.(3.6)): Die Gerade, die den oberen Bereich von dem unteren trennt, ist die gleiche in beiden Abbildungen, und zwar $\lambda_2 = -\lambda_1 - 1$. Die Eigenschaften von *Lsmo3* sind damit eine Kombination der Eigenschaften von *Lsmo1* und *Lsmo2*.

3.1.4 Lsmo4 (2D)

In diesem Abschnitt werden wir die zweidimensionale Variante des Systems *Lsmo4* auf Fixpunkte und deren Stabilität untersuchen. Das Differentialgleichungssystem lautet:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot (\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 \cdot \sigma(\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 \cdot \sigma(\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} (3.17)$$

Fixpunktanalyse.

Wir erhalten für die Fixpunkte 1 bis 9 die folgenden Bedingungen:

$$1) \vec{\beta}^* = (1,0); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -\lambda_1 + \sigma(\beta_1^p - 1) \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_1^p = 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p < 1 \Rightarrow \lambda_1 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda_2 + \sigma(\beta_2^p) \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \beta_2^p = 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p > 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq -1 \end{array} \right.$$

Sowohl bei diesem als auch bei den folgenden Fixpunkten existiert der betrachtete Fixpunkt, nur wenn eine Kombination der obigen Bedingungen erfüllt ist: eine Bedingung von der ersten Klammer muss gemeinsam mit einer Bedingung der zweiten Klammer erfüllt sein. Die unterschiedlichen Kombinationen schließen sich gegenseitig aus.

$$2) \vec{\beta}^* = (\beta_1^*, 0); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) &= \lambda_1 \beta_1^* \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_1^* < \beta_1^p \Rightarrow \beta_1^* = 1/\lambda_1 \in (0,1) \Leftrightarrow 1/\lambda_1 < \beta_1^p \\ \text{falls } \beta_1^* > \beta_1^p \Rightarrow \beta_1^* = -1/\lambda_1 \in (0,1) \Leftrightarrow -1/\lambda_1 > \beta_1^p \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda_2 \beta_1^* + \sigma(\beta_2^p) &\leq 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_2^p = 0 \Rightarrow \lambda_2 \beta_1^* \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p > 0 \Rightarrow \lambda_2 \beta_1^* \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3) \vec{\beta}^* = (0,0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0 \Rightarrow \sigma(\beta_1^p) \leq 0 \Rightarrow \beta_1^p = 0 \text{ und } \sigma(\beta_2^p) \leq 0 \Rightarrow \beta_2^p = 0$$

$$4) \vec{\beta}^* = (0, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 \beta_2^* + \sigma(\beta_1^p) &\leq 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_1^p = 0 \Rightarrow \lambda_1 \beta_2^* \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p > 0 \Rightarrow \lambda_1 \beta_2^* \leq -1 \end{cases} \\ \Rightarrow \sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) &= \lambda_2 \beta_2^* \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_2^* < \beta_2^p \Rightarrow \beta_2^* = 1/\lambda_2 \in (0,1) \Leftrightarrow 1/\lambda_2 < \beta_2^p \\ \text{falls } \beta_2^* > \beta_2^p \Rightarrow \beta_2^* = -1/\lambda_2 \in (0,1) \Leftrightarrow -1/\lambda_2 > \beta_2^p \end{cases} \end{aligned}$$

$$5) \vec{\beta}^* = (0,1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 + \sigma(\beta_1^p) &\leq 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_1^p = 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p > 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq -1 \end{cases} \\ \Rightarrow -\lambda_2 + \sigma(\beta_2^p - 1) &\geq 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_2^p = 1 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p < 1 \Rightarrow \lambda_2 \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$6) \vec{\beta}^* = (\beta_1^*, 1); \beta_1^* \in (0,1); \beta_1^* < \beta_2^*; \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma(\beta_1^p - \beta_1^*) &= \lambda_1 (\beta_1^* - 1) \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_1^* < \beta_1^p \Rightarrow \beta_1^* = 1 + 1/\lambda_1 \in (0,1) \Leftrightarrow 1 + 1/\lambda_1 < \beta_1^p \\ \text{falls } \beta_1^* > \beta_1^p \Rightarrow \beta_1^* = 1 - 1/\lambda_1 \in (0,1) \Leftrightarrow 1 - 1/\lambda_1 > \beta_1^p \end{cases} \\ \Rightarrow -\lambda_2 (1 - \beta_1^*) + \sigma(\beta_2^p - 1) &\leq 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_2^p = 1 \Rightarrow -\lambda_2 (1 - \beta_1^*) \geq 0 \\ \text{falls } \beta_2^p < 1 \Rightarrow -\lambda_2 (1 - \beta_1^*) \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7) \vec{\beta}^* = (1,1); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0 \Rightarrow \sigma(\beta_1^p - 1) \geq 0 \Rightarrow \beta_1^p = 1; \sigma(\beta_2^p - 1) \geq 0 \Rightarrow \beta_2^p = 1$$

$$8) \vec{\beta}^* = (1, \beta_2^*); \beta_2^* \in (0,1); \beta_1^* > \beta_2^*; \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\lambda_1 (1 - \beta_2^*) + \sigma(\beta_1^p - 1) &\geq 0 \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_1^p = 1 \Rightarrow -\lambda_1 (1 - \beta_2^*) \geq 0 \\ \text{falls } \beta_1^p < 1 \Rightarrow -\lambda_1 (1 - \beta_2^*) \geq 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \sigma(\beta_2^p - \beta_2^*) &= \lambda_2 (\beta_2^* - 1) \quad \begin{cases} \text{falls } \beta_2^* < \beta_2^p \Rightarrow \beta_2^* = 1 + 1/\lambda_2 \in (0,1) \Leftrightarrow 1 + 1/\lambda_2 < \beta_2^p \\ \text{falls } \beta_2^* > \beta_2^p \Rightarrow \beta_2^* = 1 - 1/\lambda_2 \in (0,1) \Leftrightarrow 1 - 1/\lambda_2 > \beta_2^p \end{cases} \end{aligned}$$

9) $\vec{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*); \beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0$. Diese Bedingungen gelten für die inneren Fixpunkte. Durch Ersetzen dieser Bedingungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \cdot (\beta_1 - \beta_2) + \sigma(\beta_1^p - \beta_1) &= 0 \\ -\lambda_2 \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \sigma(\beta_2^p - \beta_2) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der Signumfunktion auf der rechten Seite muss man im Phasenraum neun Unterbereiche unterscheiden:

a) Bedingung 9a mit $\beta_1^* < \beta_1^p$:

9a.1) $\beta_2^* < \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_1^* = 1/\lambda + \beta_2^*$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

9a.2) $\beta_2^* = \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_1^* = 1/\lambda_1 + \beta_2^p$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

9a.3) $\beta_2^* > \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_1^* = 1/\lambda + \beta_2^*$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

b) Bedingung 9b mit $\beta_1^* = \beta_1^p$:

9b.1) $\beta_2^* < \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_2^* = 1/\lambda_2 + \beta_1^p$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

9b.2) $\beta_2^* = \beta_2^p \Rightarrow \beta_1^p \neq \beta_2^p$ nur falls, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

$\Rightarrow \beta_1^p = \beta_2^p$ nur falls $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

9b.3) $\beta_2^* > \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_2^* = \beta_1^p - 1/\lambda_2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

c) Bedingung 9c mit $\beta_1^* > \beta_1^p$:

9c.1) $\beta_2^* < \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_1^* = \beta_2^* - 1/\lambda$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

9c.2) $\beta_2^* = \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_1^* = \beta_2^p - 1/\lambda_1$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

9c.3) $\beta_2^* > \beta_2^p \Rightarrow$ nur falls $\beta_1^* = \beta_2^* - 1/\lambda$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0$ und $\beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$

Nachdem wir die gewöhnlichen Fixpunkte untersucht haben, müssen wir die möglichen Konvergenzpunkte untersuchen, die durch die Signumfunktion auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems (3.17) erzeugt werden.

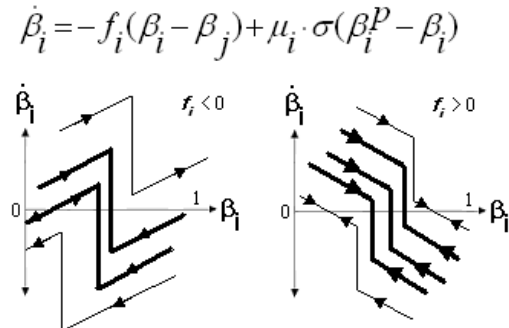


Abbildung 15

In Abbildung 15 sehen wir, wie die Konvergenzpunkte im System (3.17) entstehen. Die dick gezeichneten Linien stellen die Verläufe dar, die solche Punkte generieren. Genauso wie im System *Lsmo3* können wir die Bedingungen für ihre Entstehung, wie folgt, formulieren:

$$\dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_i^p + \varepsilon) < 0 \text{ und } \dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_i^p - \varepsilon) > 0$$

Jetzt können wir diese Ungleichungen so lösen, wie wir das für *Lsmo3* gemacht haben:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_i^p - \varepsilon) > 0 &\Leftrightarrow -f_i(\beta_i^p - \varepsilon - \beta_j) + \mu_i \cdot \sigma(\beta_i^p - \beta_i^p + \varepsilon) > 0 \Leftrightarrow \\ &-f_i(\beta_i^p - \beta_j - \varepsilon) + \mu_i > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -f_i(\beta_i^p - \beta_j) + \mu_i > 0 \Leftrightarrow \\ &-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j) + 1 > 0 \end{aligned}$$

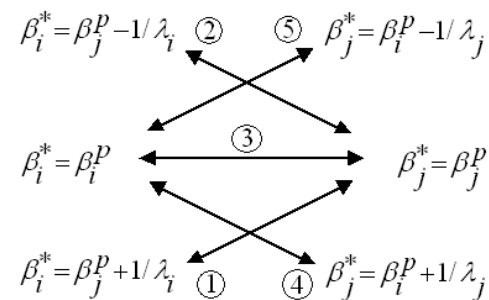
$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_i^p + \varepsilon) < 0 &\Leftrightarrow -f_i(\beta_i^p + \varepsilon - \beta_j) + \mu_i \cdot \sigma(\beta_i^p - \beta_i^p - \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow \\ &-f_i(\beta_i^p - \beta_j - \varepsilon) - \mu_i < 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -f_i(\beta_i^p - \beta_j) - \mu_i < 0 \Leftrightarrow \\ &-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j) - 1 < 0 \end{aligned}$$

Nun wissen wir, der unstetige Fixpunkt ist der Form $\vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^*)$. Dabei soll man betrachten, dass die i -Komponente des Fixpunktes um β_i^p hin- und herspringt. Jetzt müssen wir also herausfinden, welche Werte unter dieser Bedingung β_j^* annehmen kann. Es gilt nun:

$$\dot{\beta}_j(\beta_i = \beta_i^p) = 0 \Rightarrow -f_j(\beta_j - \beta_i^p) + \mu_j \cdot \sigma(\beta_j^p - \beta_j) = 0 \quad \begin{cases} \beta_j^* < \beta_j^p \Rightarrow \beta_j^* = \beta_i^p + 1/\lambda_j \\ \beta_j^* = \beta_j^p \Rightarrow \beta_j^* = \beta_i^p \\ \beta_j^* > \beta_j^p \Rightarrow \beta_j^* = \beta_i^p - 1/\lambda_j \end{cases}$$

Der mittlere Fall (also $\beta_j^p = \beta_i^p$) entspricht keinem Konvergenzpunkt sondern einem gewöhnlichen und wird daher nicht weiter behandelt. Eine letzte Möglichkeit für die Entstehung solcher Konvergenzpunkte kommt vor, wenn der Punkt die Form $\vec{\beta} = (\beta_i^p, \beta_j^p)$ hat mit der Bedingung $\beta_j^p \neq \beta_i^p$. Dann soll für beide Komponenten gelten:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_i^p + \varepsilon, \beta_j = \beta_j^p) < 0 &\Leftrightarrow -\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^p) + 1 > 0 \\ \dot{\beta}_i(\beta_i = \beta_i^p - \varepsilon, \beta_j = \beta_j^p) > 0 &\Leftrightarrow -\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^p) - 1 < 0 \\ \dot{\beta}_j(\beta_i = \beta_i^p, \beta_j = \beta_j^p + \varepsilon) < 0 &\Leftrightarrow -\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^p) + 1 > 0 \\ \dot{\beta}_j(\beta_i = \beta_i^p, \beta_j = \beta_j^p - \varepsilon) > 0 &\Leftrightarrow -\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^p) - 1 < 0 \end{aligned}$$



In Abbildungen 16 sehen wir die unterschiedlichen möglichen Kombinationen der Komponenten der Konvergenzpunkte. Wie man sieht, gehen die Pfeile immer von den endogenen Präferenzen aus (also entweder von β_i^p oder von β_j^p). Die Komponente, die gleich ihrer endogenen Präferenz ist, springt immer hin und her um diese. Wir können eben die fünf möglichen Konvergenzpunkte mit ihren entsprechenden Bedingungen zusammenfassen:

Abbildung 16

1. $\vec{\beta}^* = (\beta_j^p + 1/\lambda_i, \beta_j^p)$ mit $\beta_i^* < \beta_i^p$, $-\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^*) + 1 > 0$, $-\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^*) - 1 < 0$
2. $\vec{\beta}^* = (\beta_j^p - 1/\lambda_i, \beta_j^p)$ mit $\beta_i^* > \beta_i^p$, $-\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^*) + 1 > 0$, $-\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^*) - 1 < 0$
3. $\vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_j^p)$ mit $\beta_i^p \neq \beta_j^p$, $-\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^*) + 1 > 0$, $-\lambda_j(\beta_j^p - \beta_i^*) - 1 < 0$,
 $-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^*) + 1 > 0$, $-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^*) - 1 < 0$
4. $\vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_i^p + 1/\lambda_j)$ mit $\beta_j^* < \beta_j^p$, $-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^*) + 1 > 0$, $-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^*) - 1 < 0$
5. $\vec{\beta}^* = (\beta_i^p, \beta_i^p - 1/\lambda_j)$ mit $\beta_j^* > \beta_j^p$, $-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^*) + 1 > 0$, $-\lambda_i(\beta_i^p - \beta_j^*) - 1 < 0$

Stabilitätsanalyse.

Unter welche Bedingungen sind die untersuchten Fixpunkte lokal stabil?

Für die Stabilität der Eckenfixpunkte 1 und 5 gilt die gleiche Bedingung wie in den vergangenen drei Systemen. Lässt man die Gleichheitszeichen der Ungleichungen $\dot{\beta}_i \geq 0$ und $\dot{\beta}_j \leq 0$ weg, dann entstehen direkt endliche Bereiche um den betrachteten

Fixpunkt, in dem dieser ein stabiles Verhalten hat. Aus diesem Grund sind alle Fixpunkte 1 und 5 lokal stabil, die die Bedingungen $\dot{\beta}_i > 0$ und $\dot{\beta}_j < 0$ erfüllen.

Nun betrachten wir die Kantenfixpunkte 2, 4, 6 und 8. Der betrachtete Fixpunkt hat immer eine Komponente mit $\dot{\beta}_i \geq 0$ bzw. $\dot{\beta}_i \leq 0$. Für diese Komponente gilt die obige Bedingung der Eckenfixpunkte. Der Fixpunkt ist in Richtung der Komponente i stabil, wenn wir die Gleichheitszeichen der Ungleichungen der Fixpunktanalyse weglassen, also wenn $\dot{\beta}_i > 0$ bzw. $\dot{\beta}_i < 0$ gilt. Es gibt dann eine Komponente des Fixpunktes, für die gilt $\dot{\beta}_j = 0$. Der Fixpunkt ist in Richtung j stabil, wenn $d\dot{\beta}_j / d\beta_j < 0 \Leftrightarrow \lambda_j > 0$ erfüllt ist (mit $\beta_j^* \neq \beta_j^p$).

Jetzt untersuchen wir die inneren Fixpunkte. Die Fixpunkte 9a.1, 9a.3, 9c.1 und 9c.3 sind marginal. Ihre Komponenten müssen nur um einen Abstand $1/\lambda$ voneinander entfernt sein. Ihre genauen Werte sind aber nicht fixiert. Deshalb lassen wir sie außer Betracht. Die Fixpunkte 9a.2, 9b.1, 9b.3 und 9c.2 sind stabil, falls für ihre Komponente j mit $\lambda_j \neq 0$ die Bedingung $d\dot{\beta}_j / d\beta_j < 0 \Leftrightarrow \lambda_j > 0$ gilt. Der Fixpunkt 9b.2 mit $\beta_1^p \neq \beta_2^p$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist offensichtlich immer lokal stabil. Da die Fixpunkte 3 und 7 die Bedingungen $\dot{\beta}_1 = 0$ und $\dot{\beta}_2 = 0$ erfüllen, können wir diese als innere Fixpunkte auffassen. Für die Fixpunkte 3, 7 und 9b.2 (mit $\beta_1^p = \beta_2^p$) müssen wir eine gewöhnliche Eigenwertanalyse durchführen. Wir müssen zuerst das System (3.17) durch den Ansatz (3.3) linearisieren. Die Linearisierung des Systems (3.17) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_1 \cdot (\beta_1 - \beta_2) + \mu_1 a \cdot (\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_2 \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \mu_2 a \cdot (\beta_2^p - \beta_2) \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix ermitteln wir das charakteristische Polynom und seine Eigenwerte. Das charakteristische Polynom lautet:

$$\omega^2 + \Psi\omega + \Xi = 0 \quad (3.19)$$

mit $\Psi = f_1 + f_2 + a(\mu_1 + \mu_2)$ und $\Xi = a(f_1\mu_2 + f_2\mu_1 + a\mu_1\mu_2)$.

Die Parameter ω sind die Eigenwerte des Systems. Für die Eigenwerte ergibt sich:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}[-(a + \lambda_1)\mu_1 - (a + \lambda_2)\mu_2 \pm \sqrt{((a + \lambda_1)\mu_1 + (a + \lambda_2)\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_2 a(\lambda_1 + \lambda_2 + a)}]$$

oder auch

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\mu_2[-(a + \lambda_1)m - (a + \lambda_2) \pm \sqrt{((a + \lambda_1)m + (a + \lambda_2))^2 - 4ma(\lambda_1 + \lambda_2 + a)}]$$

mit $m = \mu_1 / \mu_2$. Man beachte, dass nur wenn a gegen unendlich strebt, die Eigenwerte des linearisierten Systems (3.18) gegen die des nichtlinearisierten Systems (3.17) streben. Diejenigen Parameterkombinationen, die den Realteil der beiden Eigenwerte negativ machen, erzeugen lokal stabile Fixpunkte. Für a gegen unendlich erhalten wir dasselbe Ergebnis wie für das System *Lsmo3*. Ein Eigenwert ist immer Null, während der zweite gegen $-\infty$ oder $+\infty$ geht. Keiner dieser beiden Fälle ergibt einen stabilen Fixpunkt. Dennoch haben numerische Experimente gezeigt, dass die inneren Fixpunkte

3, 7 und 9b.2(mit $\beta_1^p = \beta_2^p$) sich stabil verhalten können. Das bedeutet (genauso wie für das System *Lsmo3*), dass an der Sprungstelle der Signumfunktion (und ausschließlich an der Sprungstelle) die Stabilitätseigenschaften des linearisierten Systems nicht gegen die Stabilitätseigenschaften des nichtlinearisierten Systems konvergieren. Demzufolge wird bei den folgenden Analysen auf die numerischen Resultate zurückgegriffen.

Wann sind die Konvergenzpunkte lokal stabil? Mittels Abbildung 15 kann man sehen, dass die Konvergenzpunkte immer lokal stabil sind. Ihre Existenz führt dazu, dass endliche Bereiche entstehen, in denen der betrachtete Fixpunkt ein stabiles Verhalten aufweist. Infinitesimal kleine Störungen innerhalb dieser Bereiche werden gedämpft.

Wir haben nun alle Fixpunkte und Konvergenzpunkte auf ihre Stabilität untersucht. Das Programm *stab4* enthält die beschriebene Stabilitätsanalyse des betrachteten Differentialgleichungssystems (3.17). Es wurde in der Sprache PV-Wave programmiert und befindet sich im Appendix unter Code 8 (unter Codes).

Jetzt werden wir die zwei üblichen Projektionen des Parameterraums betrachten. Weil die Stabilität der inneren Fixpunkte nicht nur von den vier Parametern β_1^p , β_2^p , λ_1 und λ_2 sondern auch von m abhängt, nehmen wir die inneren Fixpunkte mit mindestens einem Wert von m , für den der Fixpunkt sich stabil verhält, als lokal stabil. Demzufolge sind die Abbildungen 17a und 17b erneut als die maximale Anzahl stabiler Fixpunkte zu verstehen. Weiß bedeutet, dass es keine stabilen Fixpunkte für die betrachtete Parameterkombination gibt. Blau entspricht dem Fall mit einem stabilen Fixpunkt, grün zwei, rot drei, violett vier und schwarz fünf.

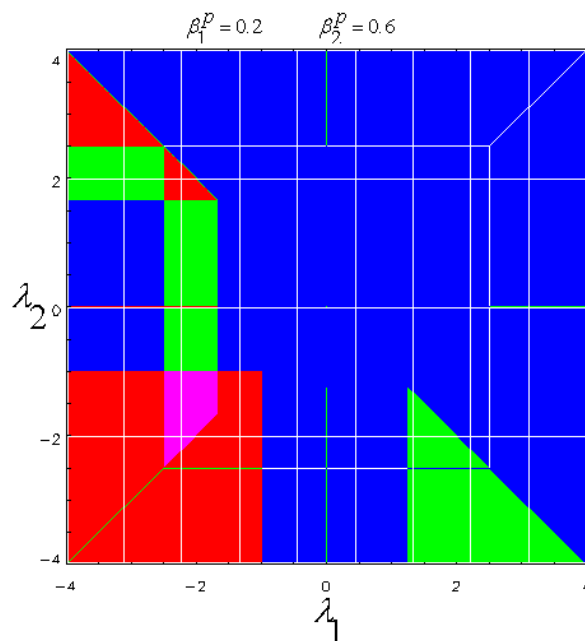


Abbildung 17a

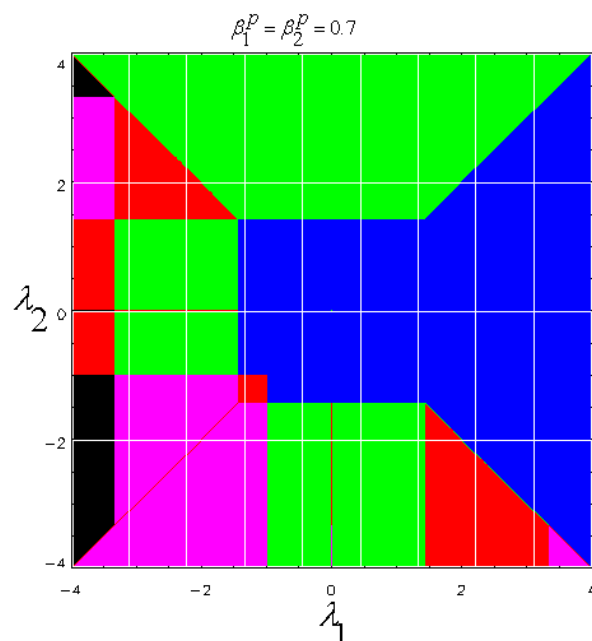


Abbildung 17b

Die genaue Form der beiden Darstellungen hängt von den konkreten Werten der endogenen Präferenzen ab. Es fällt sofort auf, dass die zwei Projektionen eine wesentlich kompliziertere Struktur besitzen als die Projektionen der letzten drei Systeme. Das liegt daran, dass die Signumfunktionen auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (3.17) unterschiedliche Argumente besitzen. In Abbildung 17a sehen wir eine Projektion für ungleiche Werte der endogenen Präferenzen (also $\beta_1^p \neq \beta_2^p$). Man erkennt trotz der im Vergleich zu den anderen Systemen komplizierte

Struktur, dass der violett-rote Bereich (der Bereich mit der höchsten Anzahl stabiler Fixpunkte) auf der unteren linken Seite des Parameterraums liegt. Das haben alle vier Systeme gemeinsam. In Abbildung 17b sehen wir die Projektion des Parameterraums für identische Werte der endogenen Präferenzen (also $\beta_1^p = \beta_2^p$). Die Verteilung der Bereiche mit unterschiedlichen Anzahlen von stabilen Fixpunkten ist im Vergleich zu den anderen Systemen wesentlich komplex. Trotzdem findet man die Gemeinsamkeit in allen vier Systemen, dass der Bereich mit der höchsten Anzahl stabiler Fixpunkte auf der unteren linken Seite liegt.

Was können wir nun über die Verteilung der stabilen Fixpunkte sagen? Sowohl Abbildung 17a als auch 17b sind zu unübersichtlich und schwer verständlich, um eine einfache Interpretation von ihrer Struktur zu finden. Wie schon erwähnt, liegt das daran, dass die Signumfunktionen auf der rechten Seite in (3.17) völlig entkoppelte Argumenten besitzen. Das erlaubt in Vergleich zu den anderen Differentialgleichungssystemen eine höhere Vielfalt bezüglich der möglichen Resultate.

3.2 Untersuchung dreidimensionaler Systeme

Bei der Untersuchung dreidimensionaler Systeme werden wir uns nur mit den Modellen *Lsmod1* (siehe Gleichung (2.25)) und *Lsmod2* (siehe Gleichung (2.26)) befassen. Wir werden die asymmetrischen Systeme *Lsmod3* (s. Gl. (2.27)) und *Lsmod4* (s. Gl. (2.28)) völlig außer Betracht lassen. Der Grund ist, dass das Verhalten aufgrund ihrer Asymmetrie bei vielen Situationen unplausibel, zu kompliziert, oder zu schwer zu interpretieren ist.

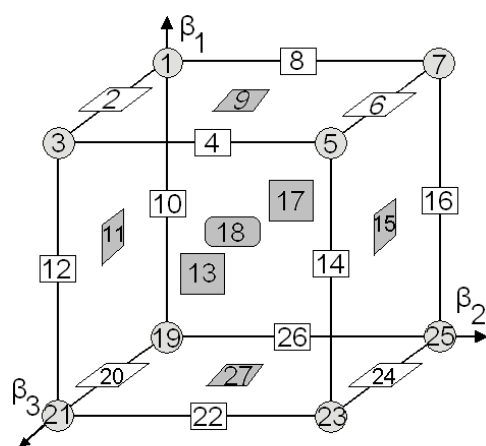


Abbildung 18

Die Einschränkung der Präferenzen im Intervall $[0,1]$ bleibt weiterhin erhalten. Das führt dazu, dass der Phasenraum ein Kubus der Kantenlänge eins ist. In Abbildung 18 ist dieser Kubus mit den unterschiedlichen Fixpunkten dargestellt. Im dreidimensionalen kubischen Phasenraum gibt es insgesamt 27 mögliche Fixpunkte. Die β_i -Variable stellt die Präferenz der Gruppe i bezüglich Gut 1 dar. Die entsprechende Präferenz der Gruppe i bezüglich des Gutes 2 kann durch die Gleichung (2.16) ermittelt werden. Nun werden wir die Bedingungen für die Existenz der unterschiedlichen Fixpunkte auflisten:

- 1) $\vec{\beta}^* = (1,0,0)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \leq 0$; $\dot{\beta}_3 \leq 0$
- 2) $\vec{\beta}^* = (1,0,\beta_3^*)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \leq 0$; $\dot{\beta}_3 = 0$; $\beta_3^* \in (0,1)$
- 3) $\vec{\beta}^* = (1,0,1)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \leq 0$; $\dot{\beta}_3 \geq 0$
- 4) $\vec{\beta}^* = (1,\beta_2^*,1)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 = 0$; $\dot{\beta}_3 \geq 0$; $\beta_2^* \in (0,1)$
- 5) $\vec{\beta}^* = (1,1,1)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \geq 0$; $\dot{\beta}_3 \geq 0$
- 6) $\vec{\beta}^* = (1,1,\beta_3^*)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \geq 0$; $\dot{\beta}_3 = 0$; $\beta_3^* \in (0,1)$
- 7) $\vec{\beta}^* = (1,1,0)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 \geq 0$; $\dot{\beta}_3 \leq 0$
- 8) $\vec{\beta}^* = (1,\beta_2^*,0)$; $\dot{\beta}_1 \geq 0$; $\dot{\beta}_2 = 0$; $\dot{\beta}_3 \leq 0$; $\beta_2^* \in (0,1)$

- 9) $\bar{\beta}^* = (1, \beta_2^*, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 \geq 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_2^*, \beta_3^* \in (0,1)$
- 10) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 0, 0); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0; \dot{\beta}_3 \leq 0; \beta_1^* \in (0,1)$
- 11) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 0, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_1^*, \beta_3^* \in (0,1)$
- 12) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 0, 1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \leq 0; \dot{\beta}_3 \geq 0; \beta_1^* \in (0,1)$
- 13) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, 1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 \geq 0; \beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$
- 14) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 1, 1); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0; \dot{\beta}_3 \geq 0; \beta_1^* \in (0,1)$
- 15) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 1, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_1^*, \beta_3^* \in (0,1)$
- 16) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, 1, 0); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 \geq 0; \dot{\beta}_3 \leq 0; \beta_1^* \in (0,1)$
- 17) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, 0); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 \leq 0; \beta_1^*, \beta_2^* \in (0,1)$
- 18) $\bar{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 = 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^* \in (0,1)$
- 19) $\bar{\beta}^* = (0, 0, 0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0; \dot{\beta}_3 \leq 0$
- 20) $\bar{\beta}^* = (0, 0, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_3^* \in (0,1)$
- 21) $\bar{\beta}^* = (0, 0, 1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \leq 0; \dot{\beta}_3 \geq 0$
- 22) $\bar{\beta}^* = (0, \beta_2^*, 1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 \geq 0; \beta_2^* \in (0,1)$
- 23) $\bar{\beta}^* = (0, 1, 1); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0; \dot{\beta}_3 \geq 0$
- 24) $\bar{\beta}^* = (0, 1, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_3^* \in (0,1)$
- 25) $\bar{\beta}^* = (0, 1, 0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 \geq 0; \dot{\beta}_3 \leq 0$
- 26) $\bar{\beta}^* = (0, \beta_2^*, 0); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 \leq 0; \beta_2^* \in (0,1)$
- 27) $\bar{\beta}^* = (0, \beta_2^*, \beta_3^*); \dot{\beta}_1 \leq 0; \dot{\beta}_2 = 0; \dot{\beta}_3 = 0; \beta_2^*, \beta_3^* \in (0,1)$

Diese Bedingungen haben beide Systeme *Lsmo*d1 und *Lsmo*d2 gemeinsam. Sie stellen die Bedingungen dar, die für die Existenz der verschiedenen Fixpunkte notwendig sind. Bei den nächsten Untersuchungen werden der Einfachheit halber der Rauschterm $\eta(t)$ gleich Null beziehungsweise die Präferenzanpassung v gleich Eins gesetzt.

3.2.1 Lsmo

d1 (3D)

Nun soll die dreidimensionale Variante des Systems *Lsmo*d1 auf Fixpunkte und deren Stabilität untersucht werden. Das betrachtete Differentialgleichungssystem (2.36) für drei Dimensionen ist das folgende:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_{12} \cdot \sigma(\beta_1 - \beta_2) - f_{13} \cdot \sigma(\beta_1 - \beta_3) + \mu_1 \cdot \sigma(\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_{21} \cdot \sigma(\beta_2 - \beta_1) - f_{23} \cdot \sigma(\beta_2 - \beta_3) + \mu_2 \cdot \sigma(\beta_2^p - \beta_2) \\ \dot{\beta}_3 &= -f_{31} \cdot \sigma(\beta_3 - \beta_1) - f_{32} \cdot \sigma(\beta_3 - \beta_2) + \mu_3 \cdot \sigma(\beta_3^p - \beta_3) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Fixpunktanalyse.

Aufgrund von Platzmangel werden wir nicht die einzelnen Bedingungen für die Existenz aller 27 Fixpunkte aufschreiben. Dies würde mehrere Seiten in Anspruch nehmen. Stattdessen werden wir direkt zu der Stabilitätsanalyse übergehen. Die Bedingungen können aus dem Programm *stab1_3D* entnommen werden oder aus den oben formulierten Voraussetzungen ermittelt werden.

Stabilitätsanalyse.

Wir werden jetzt die Voraussetzungen ableiten, unter denen die unterschiedlichen Fixpunkte stabil sind.

Wann sind die Eckenfixpunkte stabil? Für die Stabilität aller Eckenfixpunkte müssen die gleichen Bedingungen gelten wie für das zweidimensionale System *Lsmod1* (Gl. (3.1)): Die entsprechenden Ungleichungen der Fixpunktanalyse müssen aber ohne die Gleichheitszeichen erfüllt sein. Das liegt daran, dass infinitesimal kleine Störungen um die Fixpunkte zu Gebieten führen, wo die Richtung der Ableitung unverändert bleibt. Störungen werden unter diesen Bedingungen immer gedämpft.

Wann sind die Kantenfixpunkte stabil? Für zwei der Komponenten dieser Fixpunkte gilt $\beta_i^* = 0 \vee 1$ bzw. $\beta_j^* = 0 \vee 1$ mit $\dot{\beta}_i \leq \text{bzw.} \geq 0$ bzw. $\dot{\beta}_j \leq \text{bzw.} \geq 0$. Der betrachtete Fixpunkt ist in Richtung i bzw. j stabil, wenn man die Gleichheitszeichen der Ungleichungen der Fixpunktanalyse weglässt. Es soll also $\dot{\beta}_i < \text{bzw.} > 0$ bzw. $\dot{\beta}_j < \text{bzw.} > 0$ gelten. Die Begründung, warum diese Forderung reicht, ist die gleiche wie für die Eckenfixpunkte. Was ist nun mit der anderen Komponente? Die Komponente mit $\dot{\beta}_k = 0$ ist dann stabil, wenn die Bedingungen $\dot{\beta}_k(\beta_i^*, \beta_j^*, \beta_k^* + \varepsilon) < 0$ und $\dot{\beta}_k(\beta_i^*, \beta_j^*, \beta_k^* - \varepsilon) > 0$ erfüllt sind. Wie man leicht sieht, ist das nur der Fall, wenn $\beta_k^* = \beta_k^p$ (und damit $\lambda_{ki} = 0$ und $\lambda_{kj} = 0$) gilt. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, sind die entstehenden Fixpunkte marginal.

Wann sind die Flächenfixpunkte stabil? Der Fixpunkt ist in Richtung der i Komponente stabil, für die $\beta_i^* = 0 \vee 1$ und $\dot{\beta}_i \leq \text{bzw.} \geq 0$ gilt, wenn man die Gleichheitszeichen der Ungleichungen der Fixpunktanalyse weglässt (also $\dot{\beta}_i < \text{bzw.} > 0$). Der Fixpunkt ist in Richtung der j und k Komponenten mit $\dot{\beta}_j, \dot{\beta}_k = 0$ stabil, wenn die Bedingungen $\dot{\beta}_j(\beta_i^* + \varepsilon, \beta_j^*, \beta_k^*) < 0$ und $\dot{\beta}_k(\beta_i^* - \varepsilon, \beta_j^*, \beta_k^*) > 0$ bzw. $\dot{\beta}_k(\beta_i^*, \beta_j^*, \beta_k^* + \varepsilon) < 0$ und $\dot{\beta}_k(\beta_i^*, \beta_j^*, \beta_k^* - \varepsilon) > 0$ erfüllt sind. Diese Bedingungen sind nur für den Fall $\beta_j^* = \beta_j^p$ und $\beta_k^* = \beta_k^p$ erfüllt. Sind die erwähnten Bedingungen nicht erfüllt, ist der betrachtete Fixpunkt marginal.

Wann sind die inneren Fixpunkte stabil? Für die drei Komponenten der inneren Fixpunkte gilt $\beta_i, \beta_j, \beta_k = 0$ mit $\beta_i^*, \beta_j^*, \beta_k^* \in (0,1)$. Diese Fixpunkte sind nur dann stabil, wenn die Bedingung $\beta_i^* = \beta_j^* = \beta_k^* = \beta_i^p = \beta_j^p = \beta_k^p$ erfüllt ist. Um ihre Stabilität zu garantieren muss dazu offensichtlich $1 > \sum_t |\lambda_{it}|$, $1 > \sum_t |\lambda_{jt}|$ und $1 > \sum_t |\lambda_{kt}|$ gelten. Sind die endogenen Präferenzen unterschiedlich, dann müssen die alle Parameter λ_{ij} den Wert Null haben.

Wir haben nun alle Fixpunkte auf ihre Stabilität untersucht. Das Programm *stab1_3D* enthält die beschriebene Stabilitätsanalyse für die gewöhnlichen Fixpunkte des betrachteten Differentialgleichungssystems (3.21). Es wurde in der Sprache PV-Wave programmiert und befindet sich im Appendix unter Code 9 (unter Codes).

Für die Fixpunkt- bzw. für die Stabilitätsanalyse lässt sich die Anzahl der Parameter des Systems (3.21) auf neun reduzieren. Die Anzahl von Parameter ist zu gross und eine klassische Untersuchung der Projektionen des Parameterraums ergibt hier keinen Sinn. Deswegen werden wir uns keine Projektionen ansehen. Stattdessen erlaubt uns das

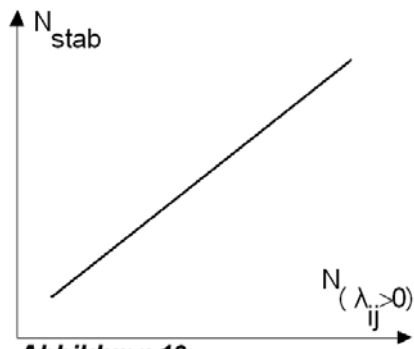


Abbildung 19

Programm *stab1_3D*, die Anzahl der stabilen Fixpunkte in Abhängigkeit von der Anzahl der positiven bzw. der negativen Parameter λ_{ij} zu darzustellen. Abbildung 19 zeigt das qualitative Ergebnis dieser Berechnung. Die Abbildung offenbart, dass die Anzahl der stabilen Fixpunkte mit der Anzahl der positiven Parameter λ_{ij} steigt (bzw. mit der Anzahl der negativen λ_{ij} sinkt).

Dieser Schluss ist dem Ergebnis der Untersuchung des zweidimensionalen Differentialgleichungssystems (Gleichung (3.2)) entgegengesetzt. Im zweidimensionalen System war die Anzahl der stabilen Fixpunkte in den Bereichen des Parameterraums wo beide λ_i negativ waren am höchsten. Die möglichen Werte von N_{stab} sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 und 10. Die Anzahl der Parameter λ_{ij} ist gleich Sechs. Das in Abbildung 19 gezeigte Ergebnis gibt uns eine qualitative Idee über eine wichtige Eigenschaft des Parameterraums.

3.2.2 Lsmo2 (3D)

Nun soll die dreidimensionale Variante des Systems *Lsmo2* auf Fixpunkte und deren Stabilität untersucht werden. Das betrachtete Differentialgleichungssystem ist:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -f_{12}(\beta_1 - \beta_2) - f_{13}(\beta_1 - \beta_3) + \mu_1(\beta_1^p - \beta_1) \\ \dot{\beta}_2 &= -f_{21}(\beta_2 - \beta_1) - f_{23}(\beta_2 - \beta_3) + \mu_2(\beta_2^p - \beta_2) \\ \dot{\beta}_3 &= -f_{31}(\beta_3 - \beta_1) - f_{32}(\beta_3 - \beta_2) + \mu_3(\beta_3^p - \beta_3) \end{aligned} \right\} (3.21)$$

Fixpunktanalyse.

Aufgrund von Platzmangel werden wir nicht die einzelnen Bedingungen aller 27 Fixpunkte aufschreiben. Dies würde genau so wie für das System (3.21) mehrere Seiten in Anspruch nehmen. Stattdessen werden wir direkt zu der Stabilitätsanalyse übergehen. Die Bedingungen können aus dem Programm *stab2_3D* entnommen werden oder aus den oben formulierten Voraussetzungen ermittelt werden.

Stabilitätsanalyse.

Unter welchen Bedingungen sind die betrachteten 27 Fixpunkte lokal stabil?

Wann sind die Eckenfixpunkte stabil? Die Stabilität der Eckenfixpunkte ist durch das Weglassen der Gleichheitszeichen der Ungleichungen der Fixpunktanalyse gewährleistet. Das führt (genau so wie im zweidimensionalen System) dazu, dass endliche Bereiche entstehen, in den der Fixpunkt sich stabil verhält. Die Eckenfixpunkte sind also lokal stabil, wenn ihre drei Komponenten diese Bedingungen erfüllen.

Wann sind die Kantenfixpunkte stabil? In Richtung der zwei Komponenten i und j (mit $\beta_i^* = 0 \vee 1$ bzw. $\beta_j^* = 0 \vee 1$ mit $\dot{\beta}_i \leq \text{bzw.} \geq 0$ bzw. $\dot{\beta}_j \leq \text{bzw.} \geq 0$) ist für den Kantenfixpunkt die Stabilität garantiert, falls man die Gleichheiten der Ungleichungen weglässt. Es soll also gelten $\dot{\beta}_i < \text{bzw.} > 0$ bzw. $\dot{\beta}_j < \text{bzw.} > 0$. Was ist nun in Richtung der anderen Komponente mit $\dot{\beta}_k = 0$? Der Kantenfixpunkt ist in Richtung der k Komponente stabil, falls die Bedingung $\partial \dot{\beta}_k / \partial \beta_k < 0 \Leftrightarrow \lambda_{ki} + \lambda_{kj} + 1 > 0$ erfüllt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, dann entstehen endliche Bereiche, wo der Fixpunkt sich stabil verhält. Kantenfixpunkte sind also nur unter diesen Bedingungen lokal stabil.

Wann sind die Flächenfixpunkte stabil? Der Fixpunkt ist in Richtung der i Komponente (mit $\dot{\beta}_i^* = 0 \vee 1$ und $\dot{\beta}_i \leq \text{bzw.} \geq 0$) stabil, falls man die Gleichheit der Ungleichungen weglässt (also $\dot{\beta}_i < \text{bzw.} > 0$). Der Fixpunkt ist in Richtung der Komponenten j und k (mit $\dot{\beta}_j = 0$ und $\dot{\beta}_k = 0$) stabil, falls die Bedingungen $\partial \dot{\beta}_j / \partial \beta_j < 0 \Leftrightarrow \lambda_{ji} + \lambda_{jk} + 1 > 0$ bzw. $\partial \dot{\beta}_k / \partial \beta_k < 0 \Leftrightarrow \lambda_{ki} + \lambda_{kj} + 1 > 0$ erfüllt sind. Diese Bedingungen sind erneut, die die stabilen Gebiete entstehen lassen. Nur unter diesen drei Bedingungen sind Flächenfixpunkte lokal stabil.

Wann sind die inneren Fixpunkte stabil? Die Fixpunkte 5 und 19 können auch als innere Fixpunkte angesehen werden. Die folgende Stabilitätsanalyse gilt also für die Fixpunkte 5, 18 und 19. Aus der Jacobi-Matrix ermitteln wir das charakteristische Polynom des dreidimensionalen Systems:

$$\omega^3 + \Theta \omega^2 + \Psi \omega + \Xi = 0 \quad (3.22)$$

mit $\Theta = \mu_1 \alpha'_1 + \mu_2 \alpha'_2 + \mu_3 \alpha'_3$,

$$\Psi = \mu_1 \mu_2 (\alpha'_1 \alpha'_2 - \lambda_{12} \lambda_{21}) + \mu_2 \mu_3 (\alpha'_2 \alpha'_3 - \lambda_{23} \lambda_{32}) + \mu_1 \mu_3 (\alpha'_1 \alpha'_3 - \lambda_{13} \lambda_{31}),$$

$$\Xi = \mu_1 \mu_2 \mu_3 (\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 - \alpha'_1 \lambda_{23} \lambda_{32} - \alpha'_2 \lambda_{13} \lambda_{31} - \alpha'_3 \lambda_{12} \lambda_{21} - \lambda_{12} \lambda_{23} \lambda_{31} - \lambda_{13} \lambda_{32} \lambda_{21}),$$

$$\alpha'_1 = 1 + \lambda_{12} + \lambda_{13}, \quad \alpha'_2 = 1 + \lambda_{21} + \lambda_{23} \quad \text{und} \quad \alpha'_3 = 1 + \lambda_{31} + \lambda_{32}.$$

Die Eigenwerte ω können wir durch die Anwendung der Formel von *Cardano* ermitteln. Die drei Lösungen von Cardano für das kubische Polynom lauten:

$$\omega_1 = u + v - \Theta / 3$$

$$\omega_2 = u(-1/2 + i/2)\sqrt{3} + v(-1/2 - i/2)\sqrt{3} - \Theta / 3$$

$$\omega_3 = u(-1/2 - i/2)\sqrt{3} + v(-1/2 + i/2)\sqrt{3} - \Theta / 3$$

mit $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ und $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$.

Wobei $q = \Theta^2 / 3 - \Theta \Psi / 6 + \Xi / 2$ und $p = \Psi / 3 - \Theta^2 / 9$.

Diejenigen Fixpunkte sind lokal stabil, die von Parameterkombinationen generiert werden, die den Realteil der drei Eigenwerte negativ machen. Da die dritte Wurzel einer komplexen Zahl eine dreifache nicht eindeutige Lösung ergibt, werden im weiteren alle inneren Fixpunkte der Einfachheit halber als stabil gezählt.

Die Lage eines beliebigen Fixpunktes hängt von neun Parametern ab: von den drei β_i^p und von den sechs λ_{ij} . Die Stabilität der inneren Fixpunkte ist von den drei μ_i und von den sechs λ_{ij} abhängig. Also insgesamt braucht man für eine vollständige Fixpunkt- bzw. Stabilitätsanalyse eines inneren Fixpunktes zwölf Parameter. Für die restlichen Fixpunkte reichen die neun Parameter der Fixpunktanalyse aus. Deswegen werden wir uns keine Projektion des Parameterraums ansehen. Die hohe Dimensionalität (in diesem Fall zwölfdimensional) des Parameterraums macht die Benutzung der Projektionen als Hilfsmittel für das Verständnis der Verteilung der stabilen Fixpunkte extrem ungeeignet. Daher werden wir genauso wie mit dem letzten dreidimensionalen System vorgehen. Wir

werden die Anzahl der stabilen Fixpunkte in Abhängigkeit von der Anzahl der positiven bzw. der negativen Parameter λ_{ij} ermitteln.

Das Programm *stab2_3D* enthält die beschriebene Stabilitätsanalyse für die gewöhnlichen Fixpunkte des betrachteten Differentialgleichungssystems (3.21). Es wurde in der Sprache PV-Wave programmiert und befindet sich im Appendix unter Code 10 (unter Codes). Das Programm *stab2_3D* ermittelt die Anzahl der stabilen Fixpunkte in Abhängigkeit von der Anzahl der positiven bzw. der negativen λ_{ij} . Das Ergebnis ist qualitativ identisch wie das von dem System (3.20). Das heisst, je mehr positive bzw. je weniger negative λ_{ij} es gibt, umso höher ist die Anzahl der stabilen Fixpunkte (siehe Abbildung 19). Die möglichen Werte, die N_{stab} annehmen kann, sind 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Die Anzahl der Parameter λ_{ij} ist gleich Sechs. Das Ergebnis der Analyse dieses dreidimensionalen Systems ist dem Ergebnis der Analyse des zweidimensionalen Systems entgegengesetzt. Bei der zweidimensionalen Analyse erhielten wir je mehr stabile Fixpunkte, umso mehr negative λ_i wir hatten (siehe Abb. 12a und 12b). Überraschenderweise ist es bei dem dreidimensionalen System genau umgekehrt (Abb. 19).

3.3 Systematisierung der Ergebnisse und Wahl des Modells

Im letzten Abschnitt haben wir die unterschiedlichen Systeme auf Fixpunkte und deren Stabilität untersucht. In diesem Abschnitt werden wir die Ergebnisse dieser Untersuchungen zusammenfassen, um die Eigenschaften der vier Systeme besser zu überblicken. Diese Informationen werden uns helfen, uns für ein der vier Modelle zu entscheiden. Tabelle 2 zeigt die wesentlichen Informationen aus den einzelnen Untersuchungen.

	N_{fix}^{2D}	N_{stab}^{2D}	Zyklen (beobachtet)	N_{fix}^{3D}	N_{stab}^{3D}
Lsmod1	0, 1, 2	0, 1, 2	Randzyklen	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10
Lsmod2	1, 2	1, 2	Gedämpfte Schwingung	0,1,2,3,4,5,6, 7,8,9,10,12	0,1,2,3,4,5,6
Lsmod3	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3	Zyklen Randzyklen	-	-
Lsmod4	1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5	Keine (Rand)Zyklen	-	-

Tabelle 2: Systematisierung der Ergebnisse der untersuchten Systeme

Die Größe N_{fix}^{2D} gibt die Anzahl der Fixpunkte an, die das betrachtete zweidimensionale System für unterschiedliche Parameterkombinationen annehmen kann, während N_{stab}^{2D} die entsprechende Anzahl der stabilen Fixpunkte angibt. Die Informationen über die Zyklen beruhen nicht auf Rechnungen sondern auf systematischen numerischen Experimenten. Es gibt zwei verschiedene Arten von Zyklen: Zyklen und Randzyklen. Die *normalen* Zyklen sind diejenigen, die ohne einen Einfluss der Randbedingung

$\beta_i \in [0,1], \forall i$ auftreten. Das bedeutet Zyklen die im inneren dieses Intervalls vorkommen, ohne von den Schranken Null oder Eins „behindert“ zu werden. Die Randzyklen sind diejenigen Zyklen, die nur im Zusammenhang mit der genannten Randbedingung auftreten können. Im System *Lsmo2* können keine Zyklen vorkommen. Versucht man die Gleichung (2.26) auf die eines harmonischen Oszillators zurückzuführen, erhält man immer einen inhomogenen Term, der zur Dämpfung der Schwingung führt. Daher können im System *Lsmo2* nur gedämpfte Schwingungen auftreten. Die Größe N_{fix}^{3D} stellt die Anzahl der Fixpunkte dar, die das betrachtete dreidimensionale System für verschiedene Parameterkombinationen annehmen kann, während N_{stab}^{3D} die Anzahl der stabilen Fixpunkte angibt, die das betrachtete dreidimensionale System für unterschiedliche Parameterkombinationen annehmen kann.

Nun soll eines der vier eingeführten Modelle für das folgende Anwendungskapitel ausgewählt werden. Die asymmetrischen Modelle *Lsmo3* und *Lsmo4* (vor allem *Lsmo4*) verhalten sich in vielen Situationen eher unplausibel und ihr Verhalten ist oft schwer zu interpretieren. Viele der Fixpunkte, die bei diesen beiden Modellen auftreten, sind keine gewöhnlichen Fixpunkte sondern sie entstehen durch die Unstetigkeit der Signumfunktionen (Konvergenzpunkte) auf der rechten Seite von Gleichung (2.27) und (2.28). Oder sie entstehen durch die Mischung der unstetigen rechten Seite zusammen mit der Randbedingung $\beta_i \in [0,1], \forall i$. Diese Eigenschaften machen das Verhalten dieser Systeme in vielen Situationen sehr schwer verständlich. Da dieses Verhalten im Vergleich zu dem der symmetrischen Systeme *Lsmo1* und *Lsmo2* kompliziert und unplausibel erscheint, werden wir die zwei Modelle *Lsmo3* und *Lsmo4* außer Betracht lassen. Nun müssen wir uns also zwischen den Modellen *Lsmo1* und *Lsmo2* entscheiden. Das Modell *Lsmo1* ist abstandsunabhängig und dadurch recht vorhersagbar und einfach zu interpretieren. Das ist die eindeutige Stärke dieses Modells. Auf der anderen Seite ist es extrem empfindlich gegenüber Störungen. Diese Eigenschaft macht das System in vielen Situationen sehr instabil. Eine solche Eigenschaft ist auf keinen Fall wünschenswert. Das Modell *Lsmo2* ist abstandsabhängig. Die Verläufe dieses Modells können deshalb etwas komplizierter sein als die des Modells *Lsmo1*. Sie liefern aber sehr oft qualitativ ähnliche Ergebnisse, wie wir gesehen haben (sowohl in 2D als auch in 3D). Das System *Lsmo2* ist verhältnismäßig stabil gegenüber Störungen. Da beide Systeme oft ein qualitativ ähnliches Verhalten aufweisen aber *Lsmo2* zusätzlich stabil gegenüber Störungen ist, entscheiden wir uns für die nachfolgenden Anwendungen für das Modell *Lsmo2*.

4. Anwendung auf beobachtete Konsumzeitreihen

In diesem Abschnitt werden wir das gewählte Modell *Lsmo2* auf verschiedene empirische Konsumzeitreihen anwenden. Um empirische Konsumzeitreihen $q_{ij}^m(t)$ eines Gutes m auf die Form von Präferenzzeitreihen $\beta_{ij}(t)$ zurückzuführen, muss man zuerst die zugrundeliegende Nutzenfunktion $U_{ij}(q_1, q_2)$ der Akteure des Systems definieren.

4.1 Die CES-Nutzenfunktion

Wir haben der Einfachheit halber für diese Transformation die CES-Nutzenfunktion (Constant Elasticity of Substitution) gewählt. Die CES-Nutzenfunktion für ein Zweigütermodell (q_1, q_2) mit unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen ij lautet:

$$U_{ij} = [b_1^{ij} (q_1^{ij})^\rho + b_2^{ij} (q_2^{ij})^\rho]^{-1/\rho} \quad (4.1)$$

q_m^{ij} stellt die verbrauchte Menge von Gut m der gesellschaftlichen Gruppe ij dar. b_m^{ij} stellt das Gewicht der Gruppe ij für das Gut m dar. Der Parameter ρ ist die sogenannte *Substitutionselastizität* und sie gibt die *Substituierbarkeit* (oder Ersetzbarkeit) der zwei betrachteten Güter 1 und 2 an. Wir werden nun die folgende Substitution machen: $\beta_m^{ij} = b_m^{ij}$. D.h., wir substituieren das Gewicht der Gruppe ij für das Gut m durch die Präferenz der Gruppe ij für das Gut m . Die folgenden Bedingungen sollen dabei immer gelten:

$$\beta_1^{ij} + \beta_2^{ij} = 1 \text{ und } 0 \leq \rho \leq \infty \quad (4.2)$$

Aus der Maximierung der Nutzenfunktion U_{ij} durch die Bedingung $dU_{ij} / dq_m^{ij} = 0$ und die Budgetrestriktion $E = p_1 \cdot q_1^{ij} + p_2 \cdot q_2^{ij}$ (mit gegebenem Einkommen E und Preisen p_1 und p_2) ergibt sich die Nachfragefunktion vom Gut m der gesellschaftlichen Gruppe ij :

$$q_m^{ij} = \frac{(\beta_m^{ij})^\sigma \cdot (p_m)^{1-\sigma}}{(\beta_1^{ij})^\sigma \cdot (p_1)^{1-\sigma} + (\beta_2^{ij})^\sigma \cdot (p_2)^{1-\sigma}} \cdot \frac{E_i}{p_m} \quad (4.3)$$

$$\text{mit } \sigma = 1/(1 + \rho) \quad (4.4)$$

Wir können durch die erste Gleichung in (4.2) die Präferenz für Gut 1 durch die Präferenz für Gut 2 ausdrücken und umgekehrt. Der Einfachheit halber werden wir die Präferenz der Gruppe ij für Gut 2 durch die Präferenz für Gut 1 darstellen als $\beta_2^{ij} = 1 - \beta_1^{ij}$. In den folgenden Gleichungen werden wir daher nur noch die Form β_{ij} als eine Abkürzung für β_1^{ij} benutzen.

Das Konsumverhalten der Lebensstilgruppe ij wird am besten durch den sogenannten *relativen Konsum* (oder relativer Verbrauch) dargestellt. Der relative Konsum ist das Verhältnis des Konsums beider Güter bezogen auf die gesellschaftliche Gruppe ij :

$$\frac{q_1^{ij}}{q_2^{ij}} = \left(\frac{\beta_{ij}}{1 - \beta_{ij}} \right)^\sigma \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \quad (4.5)$$

Multiplizieren wir nun Gleichung (4.5) mit p_1 / p_2 , erhalten wir die Beziehung der Ausgaben wiederum bezogen auf die gesellschaftliche Gruppe ij :

$$\frac{p_1 \cdot q_1^{ij}}{p_2 \cdot q_2^{ij}} = \left(\frac{\beta_{ij}}{1 - \beta_{ij}} \right)^\sigma \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1-\sigma} \quad (4.6)$$

Man kann schnell sehen, dass die CES-Nutzenfunktion eine Nachfragefunktion erzeugt, die ein sehr eingeschränktes Verhalten aufweist. Die Nachfragefunktion ist linear vom Einkommen abhängig (s. Gleichung (4.3)), während der relative Konsum und die relativen Ausgaben (s. Gleichung (4.5) und (4.6)) überhaupt nicht einkommensabhängig sind. Wegen dieses übersichtlichen Verhaltens wurde diese Nutzenfunktion für die weiteren Rechnungen gewählt. Das Verfahren hängt jedoch nicht von dieser Wahl ab und kann auch mit anderen Nutzenfunktionen durchgeführt werden.

Haben wir einen vollständigen Datensatz mit den notwendigen Zeitreihen $p_1(t)$, $p_2(t)$, $q_1^{ij}(t)$ und $q_2^{ij}(t)$, können wir mit der folgenden Formel die Zeitreihe der Präferenzen $\beta_{ij}(t)$ ermitteln:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{1 + c_{ij}} \quad (4.7)$$

mit $c_{ij} = (p_2 / p_1) \cdot (q_2^{ij} / q_1^{ij})^{1/\sigma}$. Die Gleichung (4.7) folgt aus der Beziehung (4.5). Da die Größe c_{ij} immer im Intervall $[0, \infty]$ liegt, müssen die empirisch ermittelten Werte von β_{ij} immer im Intervall $[0, 1]$ liegen.

Nach dem Ansatz der neoklassischen Theorie sind die Präferenzen stets vorgegeben und unveränderlich. Das bedeutet, dass ein Haushalt, der entsprechend der CES-Funktion handelt, seinen relativen Konsum bezüglich zweier Güter immer so verändern wird, dass die Gleichung (4.5) erfüllt ist. Dabei sollen die Größen β_{ij} konstant bleiben. Das heisst, dass jede Schwankung des relativen Konsums von einer Schwankung des relativen Preises der Güter hervorgerufen werden sollte. Sollte der relative Preis p_2 / p_1 steigen, so sollte auch der relative Konsum q_1^{ij} / q_2^{ij} steigen. Auf diese Weise sollte es nach der CES-Nutzenfunktion immer eine direkte Reaktion des relativen Konsums auf Änderungen des relativen Preises geben. Geschehen Änderungen des relativen Konsums nicht nach der von Gleichung (4.5) gegebenen Beziehung, so haben wir einen Widerspruch zu dem angenommenen neoklassischen Ansatz gefunden. An dieser Stelle können wir versuchen, diesen Effekt durch eine Veränderung der Präferenzen β_{ij} der Akteure als Folge der sozialen Wechselwirkung der betrachteten gesellschaftlichen Gruppen zu erklären. Eine weitere Alternative wäre, auf kompliziertere Nutzenfunktionen überzugehen, bei denen das Güterverhältnis auch vom (möglicherweise) schwankenden Einkommen abhängt. Wie wir im Abschnitt 2.1.2 ausführlich gezeigt haben, ist jedoch bei allen gängigen Ansätzen die Form der resultierenden Einkommensabhängigkeit zu einfach, um komplizierteren Dynamiken gerecht zu werden.

4.2 Analyse der Daten

Die Datenbank, aus der die verwendeten Zeitreihen stammen, ist das *Statistische Bundesamt*. Das benutzte Archiv ist die STATIS-CD Version 1.5 (10.12.2004). Wir werden uns den Fall von West-Deutschland (Früheres Bundesgebiet) ansehen. Für unsere Modellzwecke haben wir uns Konsumzeitreihen ausgesucht, bei denen nicht der durchschnittliche Konsum über die ganze Gesellschaft gemittelt wird, sondern in denen die Gesellschaft in drei Einkommensgruppen unterteilt wird. Die Definition der betrachteten repräsentativen Haushalte (oder Einkommensklassen) ist:

1. **Haushaltstyp 1:** 2-Personen-Haushalte von Renten- und Sozialhilfeempfängern mit geringem Einkommen. Haushalte, die aus älteren, alleinstehenden Ehepaaren bestehen und ein geringes Einkommen beziehen, das überwiegend aus Renten der Sozialversicherung oder Leistungen der öffentlichen Sozialhilfe besteht. Einbezogen werden Haushalte mit monatlichen Übertragungen von Staat und Arbeitgeber, das bei der erstmaligen Festsetzung der Einkommensgrenze im Jahr 1964 etwa in der Höhe der damaligen Sätze der Sozialhilfe lag.
2. **Haushaltstyp 2:** 4-Personen-Haushalte von Angestellten und Arbeitern mit mittlerem Einkommen der Bezugsperson. Haushalte, die aus Ehepaaren mit zwei Kindern bestehen. Einbezogen werden Haushalte, bei denen das Bruttoeinkommen aus (hauptberuflicher) unselbständiger Arbeit ungefähr dem durchschnittlichen Bruttomonatsverdienst eines männlichen Arbeiters in der Industrie oder eines männlichen Angestellten entspricht. Bei der erstmaligen Festsetzung der Einkommensgrenzen im Jahr 1964 wurde von einem Wert, der ungefähr diesen Bruttomonatsverdiensten entsprach, ausgegangen.
3. **Haushaltstyp 3:** 4-Personen-Haushalte von Beamten und Angestellten mit höherem Einkommen. Haushalte, die aus Ehepaaren mit zwei Kindern bestehen. Einbezogen werden Haushalte mit einem monatlichen Bruttoeinkommen aus (hauptberuflicher) unselbständiger Arbeit der Bezugsperson, das deutlich über dem monatlichen Einkommen liegt, das für den Haushaltstyp 2: 4-Personen-Haushalte mit mittlerem Einkommen zugrunde gelegt wird. Bei der erstmaligen Festsetzung der Einkommensgrenzen im Jahr 1964 wurde von einem nominalen Abstand von DM 1 000 zum Einkommen des Haushaltstyps 2 ausgegangen.

Die Unterteilung des sozialen Raums in den verschiedenen gesellschaftlichen Gruppen erfolgt demzufolge nach dem folgenden Schema:

Hohes Einkommen	Haushaltstyp 3 Präferenz β_3
Mittleres Einkommen	Haushaltstyp 2 Präferenz β_2
Niedriges Einkommen	Haushaltstyp 1 Präferenz β_1

Tabelle 3: *Stilisierte Milieu-Landkarte mit drei Haushaltstypen*

Kernobst vs. Banane.

Nun werden wir zunächst eine Konsumzeitreihe betrachten, deren Verhalten qualitativ vollständig durch die neoklassische Beziehung (4.5) erklärt werden kann. Sehen wir uns

Abbildung 20 an. Auf der linken Ordinate ist der einheitslose relative Verbrauch der zwei Güter Kernobst und Banane eingetragen, während auf der rechten Ordinate der einheitslose Preisquotient eingetragen ist. Die Abszisse stellt die zeitliche Dimension dar (das Zeitintervall von 1969 bis 1985). Das erste auffällige Merkmal ist, dass alle Haushalte ein qualitativ gleiches Verhalten zeigen. Das würde man auch nach der neoklassischen

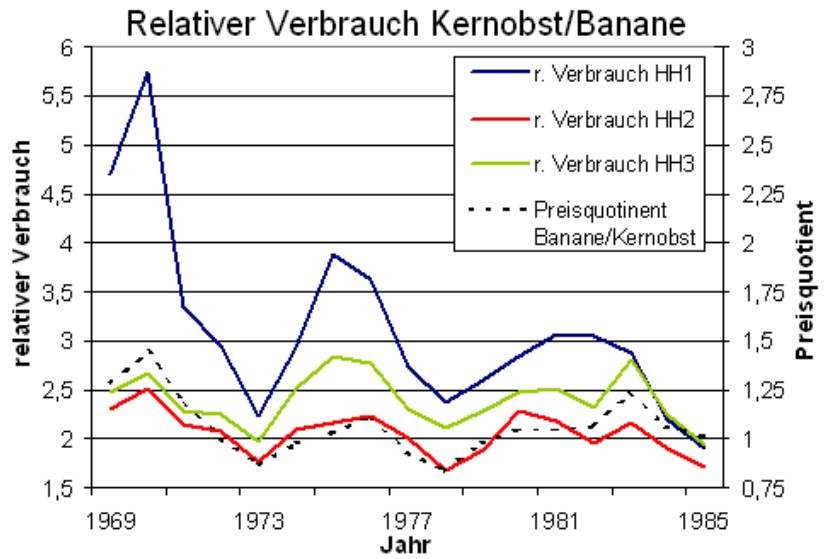


Abbildung 20

Theorie erwarten, da man i.A. nur den durchschnittlichen Konsumenten betrachtet. In allen Bereichen der Zeitreihe stimmen die Richtungen der ersten Ableitungen des relativen Verbrauchs der unterschiedlichen Gruppen völlig überein. Außerdem kann man mit bloßem Auge ganz deutlich sehen, dass alle Konsumschwankungen von einer entsprechenden Preisschwankung begleitet sind. Diese Zeitreihe kann also komplett durch die Beziehung (4.5) erläutert werden. Die Konsumschwankungen werden nach diesem Ansatz von den entsprechenden Preisschwankungen ausgelöst.

Schweinfleisch vs. Rindfleisch.

Nun schauen wir uns Abbildung 21 an, in der relative Konsum und der Preisquotient der beiden Güter Schwein- und Rindfleisch dargestellt sind. Das Zeitintervall läuft in diesem Fall von 1965 bis 1998.

Im groben sieht man, dass der Preisquotient monoton steigend ist. Die Verläufe des relativen Verbrauchs der verschiedenen Gruppen zeigen dagegen eine deutliche Schwingung über einem steigenden Trend. In einem Intervall von fast sieben Jahren (von 1986 bis 1993) verlaufen trotz des weiter steigenden Preisquotienten alle relativen Verbräuche deutlich fallend. Das widerspricht der Beziehung (4.5) und kann durch den angenommenen Ansatz der

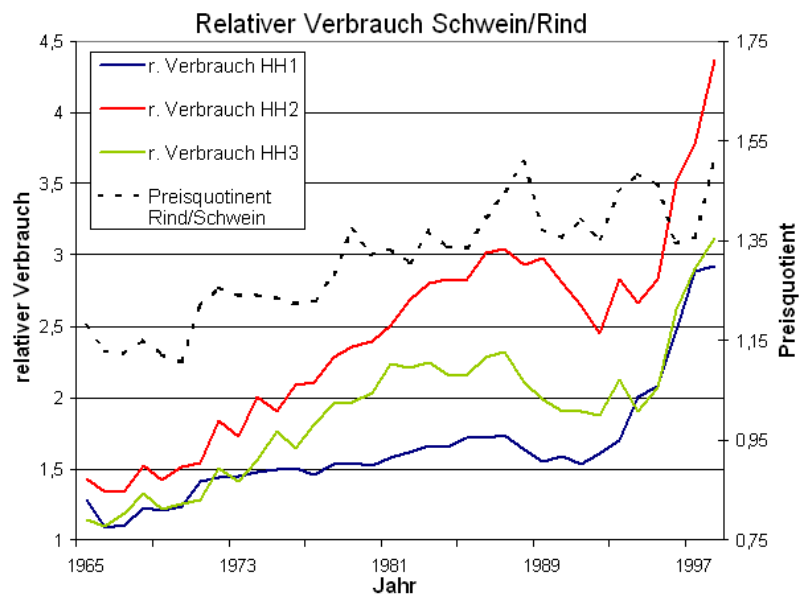


Abbildung 21

CES-Funktion nicht erklärt werden. Die drei Haushaltsgruppen verlaufen qualitativ gleich, d.h., das Vorzeichen der ersten Ableitung des relativen Konsums aller drei Haushalte ist immer gleich. In einem solchen Beispiel liegt die Annahme einer sozialen Interaktion

zwischen den verschiedenen Gruppen nahe, die im Endeffekt zu dem gezeigten Verlauf des Konsums führt. Die Bewegung der Haushalte kann nicht durch den Preisquotient erklärt werden. Wir werden jetzt versuchen, diese Bewegung durch eine soziale Wechselwirkung der drei Haushaltsgruppen durch das gewählte Modell *Lsmo2* zu erklären. Mit Hilfe der Gleichung (4.7) können wir diese Zeitreihen auf die entsprechende $\beta_i(t)$ -Darstellung zurückführen (Abbildung 22a):

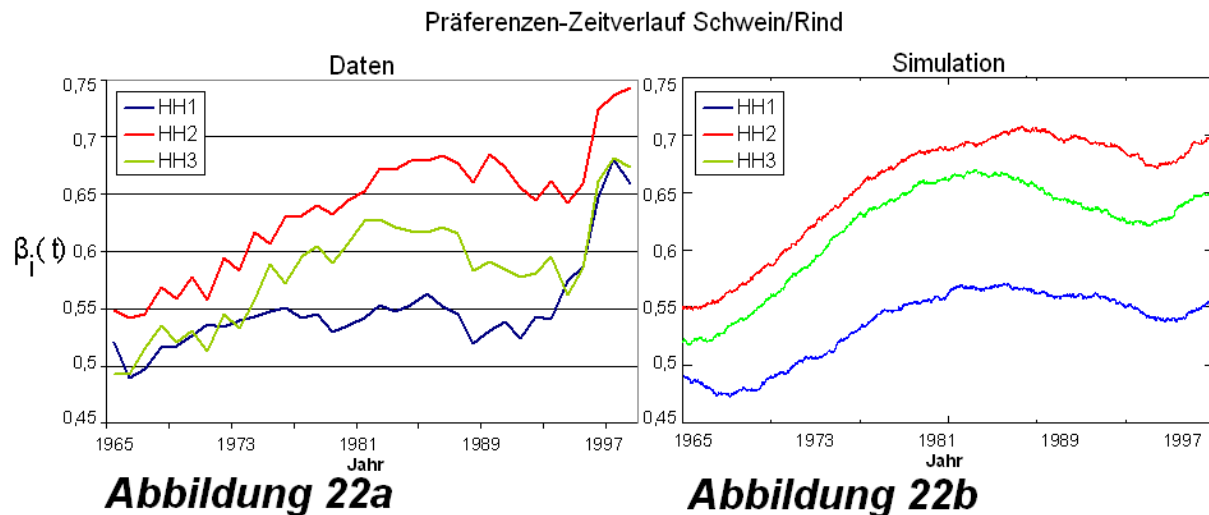
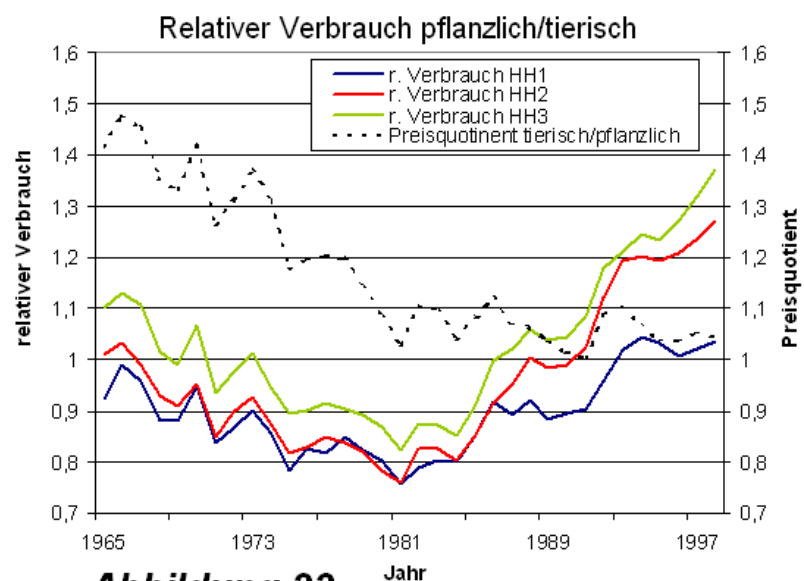


Abbildung 22a zeigt den empirischen zeitlichen Verlauf der Präferenzen $\beta_i(t)$. Mit Hilfe des Programms *Lsmo2* und der in Tabelle 4 (siehe Appendix 7) gezeigten Input-Daten wurde die in Abbildung 22b gezeigte Simulation generiert. Man sieht, dass qualitativ der simulierte Verlauf dem Datenverlauf entspricht. Die Vorzeichen der Elemente der f_{ij} -Matrix, die in Tabelle 4 angegeben sind, entsprechen auch dem klassischen Interaktionsmuster von Aspiration und Distinktion, das in der Soziologie oft verwendet wird: jede Gruppe will sich von den relativ ärmeren Gruppen unterscheiden und die relativ reicheren Gruppen nachahmen. Dieses Ergebnis ist ein Zeichen dafür, dass der Ansatz der sozialen Wechselwirkung konsistent und das Modell vernünftig ist.

Pflanzliche Produkte vs. Tierische Produkte.

Jetzt werden wir uns einem anderen interessanten Fall zuwenden. Betrachten wir den relativen Konsum von tierischen und pflanzlichen Produkten der drei Haushaltsgruppen. Diese sehen wir in Abbildung 23. Der Preisquotient ist monoton fallend. Das bedeutet, dass nach Gleichung (4.5) der relative Verbrauch auch nur fallend sein dürfte. Das geschieht offensichtlich nur von 1965 bis 1981. Danach steigt der relative Konsum zugunsten von den pflanzlichen Produkten (für alle drei Gruppen) bis 1998, obwohl die pflanzlichen Produkte relativ



teurer werden. Analog zu dem Beispiel von Schwein- und Rindfleisch weisen die drei Haushaltsgruppen ein qualitativ gleiches Verhalten auf, insofern, dass die Ableitung des relativen Konsums der drei Haushaltsgruppen immer übereinstimmend ist. Da der Konsumverlauf nicht durch den Preisverlauf erklärt wird, werden wir durch die Beziehung (4.7) die Zeitreihen der Präferenzen ermitteln. Diese Zeitreihen sehen wir in Abbildung 24a:

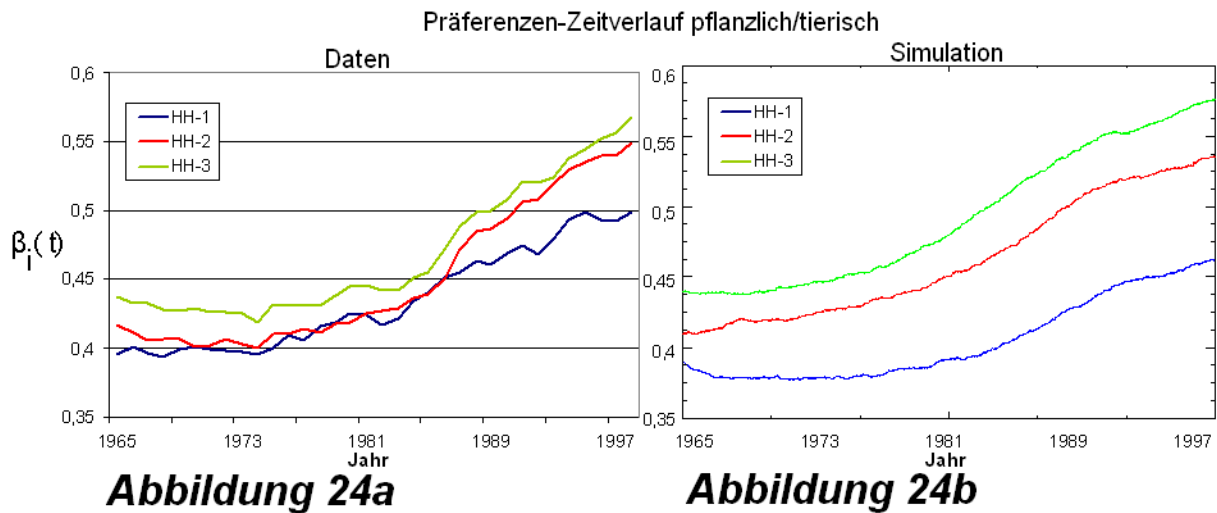


Abbildung 24a weist darauf hin, dass die Präferenz aller Haushalte im Laufe der Zeit sich deutlich zugunsten von den pflanzlichen Produkten entwickeln. Abbildung 24b ist die entsprechende Simulation, die mit den in Tabelle 5 (s. Appendix 7) gezeigten Input-Daten generiert wurde. Man sieht, dass die empirischen und die simulierten Verläufe sich trotz quantitativer Abweichungen qualitativ gleich verhalten. Die Vorzeichen der Elemente der verwendeten f_{ij} -Matrix sind genau die gleichen wie die vom Beispiel Schweinfleisch vs. Rindfleisch.

Butter vs. Margarine.

Betrachten wir jetzt den Fall der zwei substituierbaren Güter Butter und Margarine. In Abbildung 25 sehen wir den relativen Konsum dieser zwei Güter für die drei unterschiedlichen Haushaltstypen. Eine bemerkenswerte Besonderheit dieser Graphik ist, dass im Gegenteil zu den vorherigen Beispielen die verschiedenen Haushaltstypen unterschiedliche Bewegungen durchführen.

Die drei Verläufe unterscheiden sich, was darauf hinweist, dass eventuell eine starke Interaktion zwischen den drei Gruppen herrscht. Außer während der letzten sechs Jahre verläuft Haushaltstyp 3 immer gegen den Preisquotienten. Haushaltstyp 1 verläuft zwischen 1970 und 1996 auch gegen den

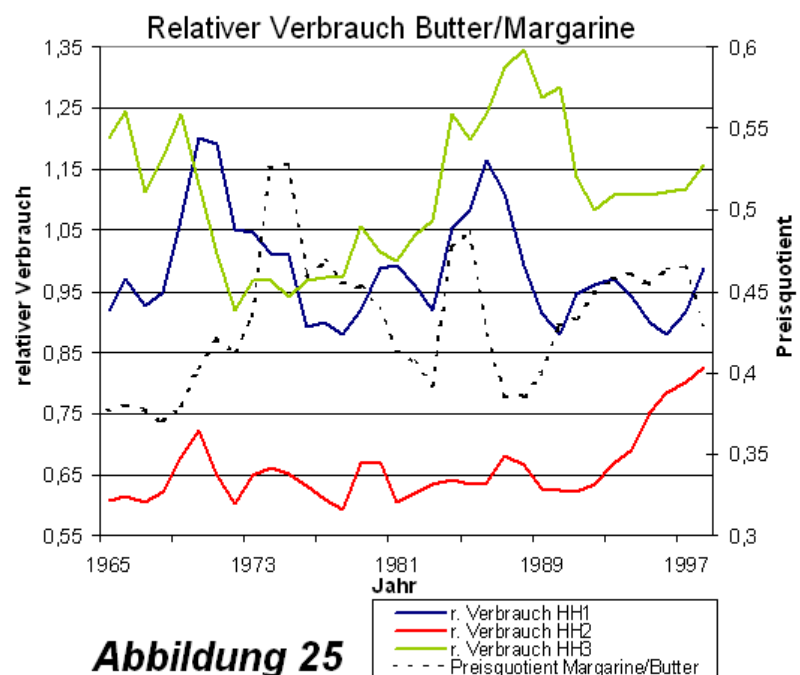
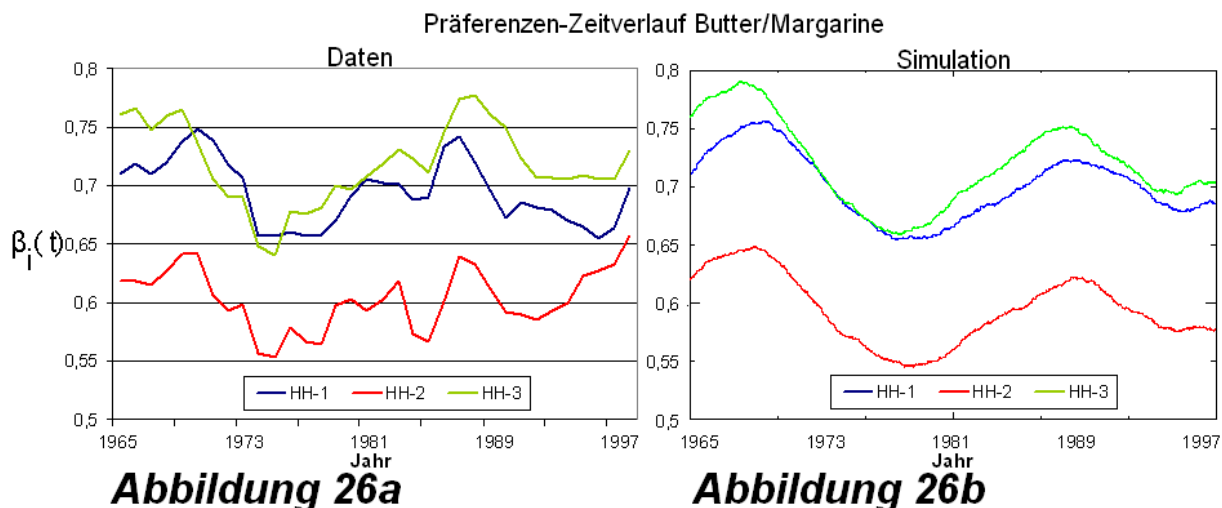


Abbildung 25

Preisquotienten. Haushaltstyp 2 bleibt relativ unberührt von den Änderungen des Preisquotienten mit Ausnahme von den letzten 6 Jahren. Ansonsten verlaufen die drei Haushalte oft unterschiedlich und sogar gegenläufig in Kontrast mit den drei letzten Fällen. Zum großen Teil können diese Zeitreihen also nicht durch die Beziehung (4.5) erklärt werden. Wir können nun durch die Beziehung (4.7) die gezeigten Zeitreihen auf die Darstellung ihrer entsprechenden Präferenzen zurückführen. Diese Darstellung sehen wir in Abbildung 26a:



Wir sehen in Abbildung 26a, dass die Präferenzen aller drei Haushaltsgruppen eine Schwingung beschreiben. In den Intervallen von 1965 bis 1970 bzw. von 1975 bis 1989 entwickeln sich die Präferenzen aller Haushaltstypen zum Vorteil von Butter, während in den Intervallen von 1970 bis 1975 bzw. von 1989 bis 1997 (außer bei Haushaltstyp 2) entwickeln sich die Präferenzen zugunsten von Margarine. Der erkennbare Trend der empirischen Präferenzen ist also eine Schwingung mit einer Frequenz von etwa 18 Jahren. Die Simulation der Daten in Abbildung 26b zeigt, dass die Schwingung von Abbildung 26a reproduziert werden konnte. Die qualitativen Merkmale wurden korrekt abgebildet. Die gewählten Input-Daten befinden sich unter Appendix 7 in Tabelle 6. Die Elemente der f_{ij} -Matrix (außer f_{12}) haben wiederum die gleichen Vorzeichen wie bei den Simulationen Schweinefleisch vs. Rindfleisch bzw. Pflanzliche Produkte vs. Tierische Produkte.

Bier vs. Wein.

Als letztes werden wir uns ein Beispiel ansehen, von dem man im Voraus ahnen kann, dass eine soziale Interaktion zwischen den unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen bestehen könnte. Es handelt sich um den Fall Bier vs. Wein. Es ist wohl bekannt, dass viele Menschen den Konsum von Wein, Bier und anderen alkoholischen Getränken benutzen um die soziale Stellung zu symbolisieren und sich von anderen Verbrauchergruppen zu unterscheiden. In Abbildung 27 können wir den Zeitverlauf des relativen Verbrauchs dieser beiden Güter und den entsprechenden Preisquotient sehen. Man sieht, dass die zwei Haushaltsgruppen 2 und 3 einen ziemlich ähnlichen Verlauf ausführen, während Haushaltstyp 1 etwas anders verläuft. Der Preisquotient hat einen deutlichen Anstieg (d.h. Wein wird relativ teurer) von 1965 bis 1981. Trotzdem steigt von 1969 bis 1981 der relative Verbrauch von Haushalt 2 und 3 (d.h. Wein wird trotz des Preisquotienten relativ mehr konsumiert). Von 1981 bis 1998 verhalten sich die Haushaltsgruppen 2 und 3 genau gegen den Verlauf des Preisquotienten (wenn Bier relativ teurer wird kaufen sie relativ mehr Bier und wenn Wein relativ teurer wird kaufen sie relativ mehr Wein), was der Beziehung (4.5) widerspricht. Die Haushaltsgruppe 1 verhält sich auch in den Zeitintervallen von 1975 bis 1978 bzw. von 1987 bis 1998

genau gegen den Preisquotienten, was wiederum nicht durch die Gleichung (4.5) erläutert werden kann.

Offensichtlich widersprechen die Zeitreihen in Abbildung 27 sehr oft dem Verhalten des relativen Konsum der CES-Nutzenfunktion (s. Gleichung (4.5)). Nun bleibt uns die Frage: Wodurch wird dieses Verhalten ausgelöst? Anscheinend ist es den Konsumenten der verschiedenen Gruppen wichtig, trotz des ungünstigen

Preisverhältnisses mehr von dem relativ teuer gewordenen Gut zu erwerben. Um die Zeitreihen in Abbildung 27 in die Darstellung der Präferenzen zu bringen, müssen wir die Beziehung (4.7) verwenden. Die Transformation der Daten ergibt die Abbildung 28a:

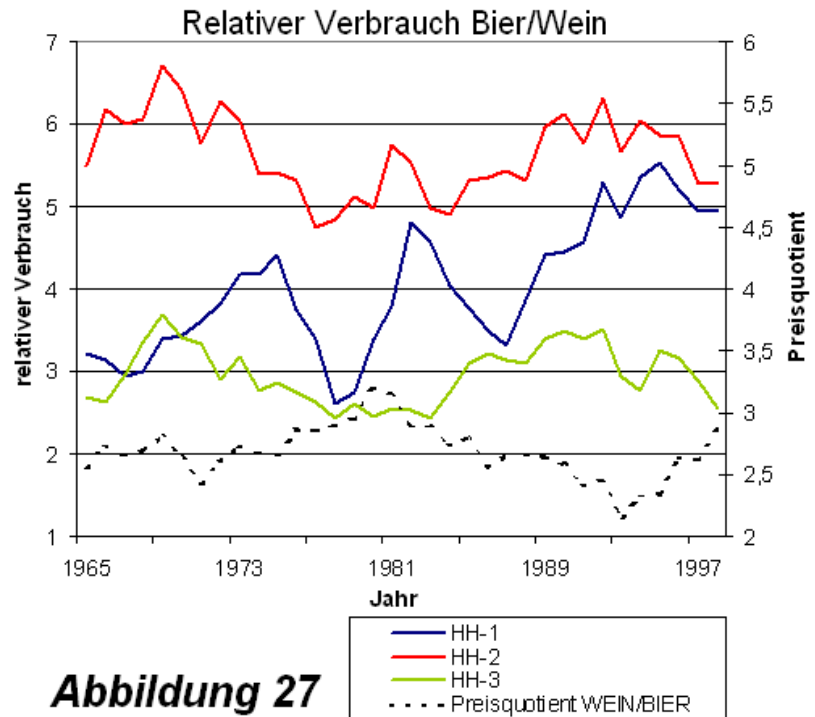


Abbildung 27

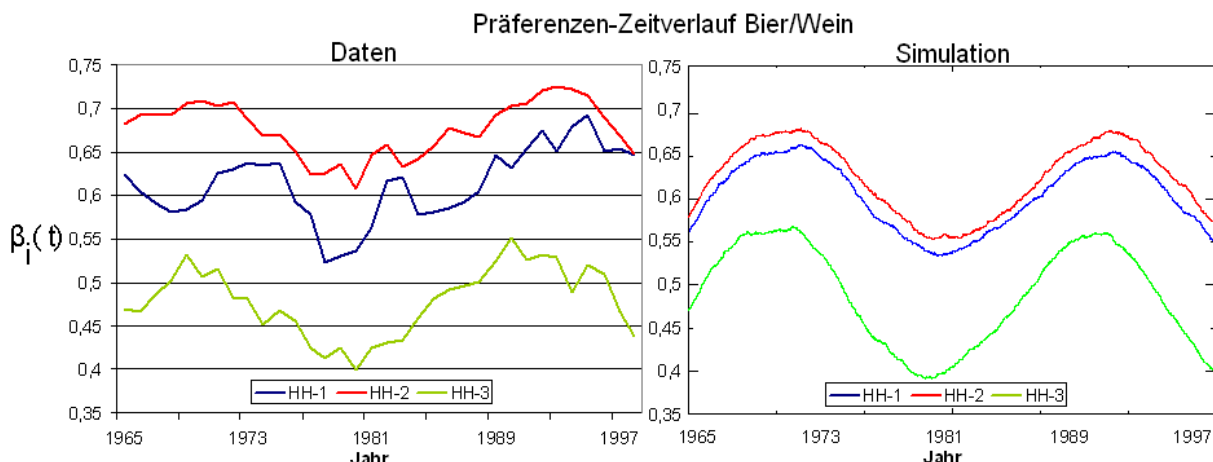


Abbildung 28a

Abbildung 28b

Analog wie im Fall Butter vs. Margarine verlaufen die Präferenzen der drei Haushaltstypen zusammen (außer Haushaltstyp 1 von 1965 bis 1968) und beschreiben eine Schwingung (siehe Abbildung 37a). Von 1965 bis etwa 1971 bzw. von 1980 bis etwa 1993 entwickeln sich die Präferenzen zum Vorteil von Bier, während von 1971 bis 1980 bzw. von 1993 bis 1998 entwickeln sie sich zugunsten von Wein. Es handelt sich um eine Schwingung mit einer Frequenz von etwa 20 Jahren. In Abbildung 28b sehen wir die Simulation der Daten, wobei man die erwähnte Schwingung deutlich reproduziert wird. Trotz leichter quantitativer Unterschiede wurden die Verläufe von Abbildung 28a qualitativ erfolgreich reproduziert, d.h. das Vorzeichen der Ableitungen der Präferenzen stimmen mit den mit den der Daten überein. Die Elemente der für die Simulation verwendeten f_{ij} -Matrix (s. Appendix 7, Tabelle 7) haben die gleichen Vorzeichen wie die Elemente der drei ersten Beispiele.

5. Zusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Aspekte des mikroökonomischen Grundmodells der Entscheidung über knappe Mittel diskutiert (Kapitel 2.1). Die Einschränkungen der stark vereinfachenden neoklassischen Annahme, dass die Konsumschwankungen eines Gutes im Markt nur von den Änderungen der Preise der relevanten Güter und von den Variationen des Einkommens der Konsumenten abhängen, wurden analysiert. Solche Annahmen führen dazu, dass die hergeleiteten Nachfragefunktionen ein unflexibles Verhalten aufweisen. Außerdem ergeben solche Nachfragefunktionen für gegebene Preise und Einkommen stets eine eindeutige Lösung, was bedeutet, dass das Konsumentenverhalten unter diesen gegebenen Randbedingungen völlig determiniert ist.

Ein Ansatz für die Interdependenz der Nutzenfunktionen wurde vorgeschlagen (Kapitel 2.2). Dieser Ansatz erweitert die neoklassische Theorie dadurch, dass er den gegenseitigen Einfluss der Präferenzen der verschiedenen Konsumentengruppen unter den sonst bekannten neoklassischen Randbedingungen erlaubt. Dieser Ansatz geht unter speziellen Bedingungen in den vereinfachenden Ansatz der neoklassischen Theorie über. Die unterschiedlichen Modelle für interdependente Nutzenfunktionen wurden auf Fixpunkte und deren Stabilität untersucht (Kapitel 3), mit dem Ziel, ihre allgemeinen Eigenschaften besser zu verstehen.

Im letzten Schritt wurde das Modell dynamischer interdependenter Nutzenfunktionen durch das konkrete Beispiel der CES-Nutzenfunktion auf beobachtete Konsumzeitreihen angewandt (Kapitel 4).

Wie am Anfang dieser Arbeit erwähnt wurde, bestanden in den letzten Jahrzehnten die Bemühungen vieler Ökonomen daraus, die Nutzenfunktionen unter den sonstigen traditionellen Annahmen so zu gestalten, dass sie so wenig Einschränkungen wie nur möglich aufweisen, um flexible Nachfragefunktionen herzuleiten, die das komplexe empirische Konsumverhalten erklären können. Seltener wurde sich aber vorgenommen, über die gängigen Annahmen hinauszugehen und neue Wege zu finden. In der vorliegenden interdisziplinären Arbeit wurden wesentlichen Annahmen von Ökonomie und Soziologie zur Natur des Konsums zusammengebracht. Daraus resultierte die Anwendung der *interdependenten Nutzenfunktion* in einem dynamischen System. Es ist klar, dass einerseits die Konsumenten „das Beste aus ihrem Geldbeutel“ zu machen versuchen (ökonomische Nutzenmaximierung und Ermittlung des Haushaltsoptimums). Auf der anderen Seite darf man nicht vernachlässigen, dass Menschen soziale Wesen sind und viele einen Nutzen darin sehen, bestimmte Gruppen von Konsumenten nachzuahmen oder abzulehnen (Aspirations- und Distinktionseffekt). Darüber hinaus haben Faktoren wie Vorlieben, Erziehung, Werbung, etc. einen entscheidenden Einfluss auf Konsumententscheidungen – Faktoren, die teilweise im vorgestellten Modell abgebildet werden konnten.

Die Anwendung des Modells interdependenter Nutzenfunktionen auf beobachtete Konsumzeitreihen erwies sich als erfolgreich. Die Simulation der Daten erfolgte durch die Verwendung von f_{ij} -Matrizen, die die klassischen soziologischen Annahmen bestätigten: meistens neigen die gesellschaftlichen Gruppen dazu, die relativ reicheren Gruppen nachzuahmen und sich von den relativ ärmeren Gruppen zu unterscheiden. Dieses Ergebnis ist von großer Wichtigkeit und zeigt, dass der Ansatz der interdependenten Nutzenfunktionen nicht nur Konsumzeitreihen richtig reproduzieren kann sondern uns auch erlaubt, wichtige Aussagen über die „soziologischen Parameter“ zu machen.

Die interessante Frage zur Zukunftsvorhersage im Sinne möglicher zukünftiger Konsumszenarien bleibt leider aufgrund von Platz- und Zeitmangel außerhalb des Rahmens dieser Diplomarbeit. Das vorgeschlagene Modell stellt hierfür ein interessantes Werkzeug dar.

Die weitere Integration verschiedener Disziplinen wie der Soziologie, Ökologie, Psychologie, Politikwissenschaft, usw. mit der heutigen ökonomischen Theorie bleibt ein sehr wichtiges Unternehmen, dessen Zusammenhänge immer tiefer verstanden werden müssen, um eine nachhaltige Zukunft für die Natur und die Menschheit erreichen zu können.

Appendix

Appendix 0

Appendix 0 ist eine zehn Seiten lange Zusammenfassung des ersten Kapitels „Theorie des Haushalts“ aus dem Buch „Einführung in die Mikroökonomie“ von Robert Linde.

Die Mikroökonomie befasst sich mit den Konsumententscheidungen von Menschen über knappe Mittel und mit dem Zusammenwirken dieser Entscheidungen.

Mikroökonomie: Grundmodell der Entscheidung über knappe Mittel

Zur Erklärung und Beschreibung solcher Entscheidungen wird typischerweise eine bestimmte Modellvorstellung vom Entscheidenden und von der Entscheidungssituation verwendet. Ihre Elemente lassen sich mit folgendem Beispiel aufzeigen:

Peter hat den ganzen Tag am Strand gelegen. Er ist entsprechend hungrig und durstig. Leider hat er nur 5 € in der Tasche. Von dem Geld könnte er 10 Flaschen Bier kaufen, denn eine Flasche Bier kostet 0,5 €. Er könnte auch 5 kg Brot erwerben, denn ein kg Brot kostet 1 €. Er könnte auch Kombinationen von Bier und Brot kaufen, z.B. 4 Flaschen Bier und 3 kg Brot. Er könnte auch Mengenkombinationen kaufen, die weniger als 5 € kosten. Er kann jedoch keine Mengenkombinationen erwerben, die mehr als 5 € kosten. Da ihm niemand Kredit gibt, sind 20 Flaschen Bier und 5 kg Brot oder 6 Flaschen Bier und 6 kg Brot nicht realisierbar. Peter unterliegt bei der Festlegung der zu wählenden Güterkombinationen also einer *Beschränkung* oder *Restriktion*. Sie teilt die Menge der Bier-Brot-Kombinationen von derjenigen ab, die unter den gegebenen Umständen nicht realisierbar ist. Die Beschränkung repräsentiert die äußeren Bedingungen von Peter's Entscheidungsproblem. Er kann sie nicht beeinflussen. Er hat nur 5 € in der Tasche, und der Bierpreis und der Brotpreis sind ebenfalls nicht veränderbar.

Zur Lösung des Entscheidungsproblems reicht es nicht aus, zu wissen, dass nicht jede Bier-Brot-Kombination erworben werden kann. Peter muss sich auch über seine Wertschätzung der unterschiedlichen Kombinationen im klaren sein. Zum Beispiel könnte er den Grundsatz „mehr ist stets besser“ huldigen. Dann würde er es nicht bei einem Kilo Brot und einer Flasche Bier bewenden lassen. Er würde die gesamten 5 € ausgeben. Selbst dann kommen mehrere Kombinationen in Betracht. Auch über seine relative Wertschätzung muss er sich im klaren sein. Nützlich wäre es zudem, wenn er nicht nur die heute realisierbaren Bier-Brot-Kombinationen in einer Rangfolge bringen könnte: Vielleicht hat er morgen 10 € statt nur 5 €. Dann kommen mehrere Mengenkombinationen in Betracht. Peter muss also die realisierbaren – besser noch: *alle* – Mengenkombinationen nach ihrer Erwünschtheit ordnen können. Er braucht eine *Präferenzordnung* hinsichtlich der relevanten Alternativen. Man kann auch sagen: Peter muss sich über die Wertschätzung verschiedener Alternativen im klaren sein. Oder: Er muss Vorstellungen über den Nutzen verschiedener Alternativen haben. Welche ist besser? Welche ist schlechter? Welche sind gleich gut?

Das dritte und letzte Element der Entscheidungssituation ist die *Zielvorstellung* des entscheidenden Individuums. In der Regel wird angenommen, ein Individuum wähle aus den realisierbaren Alternativen diejenige aus, die ihm als die günstigste erscheint. Man kann auch sagen: Es wählt diejenige aus, die ihm das höchstmögliche Wohlergehen verschafft, oder: Es wählt diejenige aus, die seinen *Nutzen maximiert*.

Die Entscheidungssituation des Individuums bei der Wahl zwischen verschiedenen Alternativen besteht somit typischerweise aus drei Elementen, nämlich

- (i) *Restriktionen*
- (ii) *Präferenzen*
- (iii) *Zielvorstellung*

Man kann diesen Ansatz – etwas locker formuliert – wie folgt ausdrücken: Das Individuum versucht, unter den gegebenen äußeren Umständen das Beste aus seiner Situation zu machen. Das Ergebnis der Entscheidung ist dann natürlich ebenfalls von diesen drei Elementen abhängig. Wären die äußeren Restriktionen andere, hätte das Individuum womöglich anders entschieden. Wären seine Präferenzen andere und/oder das Ziel ein anderes, würde die Entscheidung ebenfalls anders ausfallen. Indem unterstellt wird, dass ein Individuum seine in einer bestimmten Situation gefällte Entscheidung auch durchzusetzen sucht, wird aus dem Entscheidungsmodell ein Verhaltensmodell. Menschliches Verhalten wird in der Mikroökonomie also aus dem Zusammenwirken äußerer Restriktionen, individueller Präferenzen und individueller Zielvorstellungen abgeleitet. Als Zielvorstellung wird in aller Regel „Wahl der günstigsten Alternative“, also „Maximierung des Nutzens“ angesehen. Man spricht in diesem Zusammenhang häufig vom *homo oeconomicus*. Das ist ein Mensch, dessen Verhalten durch das eben beschriebene Modell wiedergegeben werden kann. Wie jedes Menschenmodell ist auch der *homo oeconomicus* eine sehr umstrittene Erscheinung. Man hat Anstoß daran genommen, dass ein Mensch Restriktionen, Präferenzen und Ziele auseinanderhalten könne. Es wurde bestritten, dass ein Mensch die verschiedenen zur Diskussion stehenden Möglichkeiten nach ihrer relativen Vorzüglichkeit ordnen kann. Es wurde bestritten, dass ein Mensch sich rational verhält in dem Sinn, dass er sich zunächst einen Überblick über die realisierbaren Möglichkeiten verschafft, zwischen denen er dann die beste auswählt.

Theorie des Haushalts: Elementare Analyse der Verbrauchsentscheidung

Nach der Formulierung des grundlegenden Ansatzes werden wir jetzt lernen, wie die Entscheidungen eines Individuums erklärt und beschrieben werden. Wir nennen das Individuum in seiner Rolle als Einkommensverwender und –bezieher einen *Haushalt* oder *privaten Haushalt*. In seiner Eigenschaft als privater Haushalt hat ein Individuum eine Reihe von miteinander verbundenen Entscheidungen zu treffen.

Die wesentlichen ökonomischen Fragen eines Haushalts sind:

- (i) *Wie und woher soll der Haushalt sich sein Einkommen beschaffen?*
- (ii) *Wie soll der Haushalt sein Einkommen verwenden?*

Wir interessieren uns nicht dafür, woher der betrachtete Haushalt sein Einkommen bezieht. Wir werden uns nur mit der zweiten Frage beschäftigen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, der Haushalt gebe sein gesamtes Einkommen für Konsumzwecke aus. Diese Annahmen erleichtern es uns, die Verbrauchsentscheidung zu analysieren, die Entscheidung darüber, wie viel vom Einkommen zum Erwerb welcher Güter ausgegeben wird. Wenn der Haushalt entscheiden will, welche Ausgaben er für welche Güter in dem vor ihm liegendem Zeitraum tätigen will, braucht er folgende Informationen:

- Welche Güter sollen überhaupt gekauft werden?
- Welche Preise haben diese Güter?
- Wie hoch wird das Einkommen des Haushalts in dem betrachteten Zeitraum sein?
- Der Haushalt muss sich über seine Präferenzen hinsichtlich der verschiedenen Güter klar werden.
- Der Haushalt muss sich über das Ziel des Gütererwerbs klar werden. Wir nehmen an: Er gibt sein Geld so aus, dass sein Nutzen maximiert wird.
- Der Haushalt muss sich darüber klar werden, für welchen Zeitraum seine Planungen gelten, wie lang der Planungszeitraum ist.

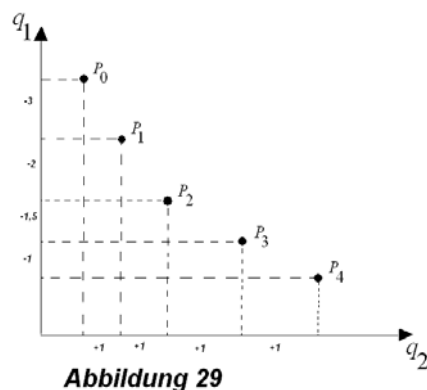
Wenn diese Dinge bekannt sind, sind die Restriktionen, die Präferenzen und das Ziel des Haushalts bekannt, und die Verbrauchsentscheidung kann analysiert werden.

Betrachten wir zunächst die Präferenzen des Haushalts. Nehmen wir der Einfachheit halber an, der Haushalt habe die Erwerbungen von nur zwei Gütern festzulegen. Bezeichnen wir die Mengen dieser Güter mit q_1 und q_2 . Die Wohlfahrtslage des Haushalts ist davon abhängig, wie viel von diesen Gütern ihm zur Verfügung steht. Die Annahme des Verbrauchs von nur zwei Gütern dient der Vereinfachung. Die Grundlegenden Erkenntnisse, die dabei gewonnen werden, gelten auch für den Fall, dass der Haushalt beliebig viele Güter verbraucht (Man kann sich vorstellen, q_1 sei ein vom Haushalt verbrauchtes Gut, und das Symbol q_2 fasse die *Gesamtheit* aller übrigen Güter zusammen). Betrachten wir nun die *Nutzenfunktion*

$$U = U(q_1, q_2). \quad (0.1)$$

Als *Nutzenfunktion* bezeichnet man die *Beziehung* zwischen dem *Nutzenniveau* und den dafür relevanten Größen.

Wir wissen jetzt wovon der Nutzen abhängig ist. Und damit stellt sich sofort die folgende Frage: *In welcher Weise* hängt das Nutzenniveau von den Verbrauchsmengen der beiden Güter ab? Dies ist die Frage nach den *Eigenschaften* der Nutzenfunktion. Wir müssen wenigstens einige ihrer Eigenschaften kennen, um mit der Funktion Aussagen machen zu können. Zur Ableitung der Eigenschaften, die man Nutzenfunktionen üblicherweise beibringt, betrachten wir die Abbildung 29.



In der Abbildung sieht man ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz. Entlang der Ordinate wird die Verbrauchsmenge von Gut 1 gemessen. Entlang der Abszisse wird die Verbrauchsmenge von Gut 2 gemessen. Betrachten wir den Punkt P_0 . Er stellt eine bestimmte Verbrauchsmengenkombination beider Güter dar. Man kann auch sagen, P_0 repräsentiere ein bestimmtes *Güterbündel*. Diesem Güterbündel P_0 ist entsprechend der Nutzenfunktion (0.1) ein bestimmtes Niveau des Wohlergehens des Haushalts zugeordnet.

Zur Aufdeckung der Eigenschaften der Nutzenfunktion werden nunmehr zwei Fragen gestellt:

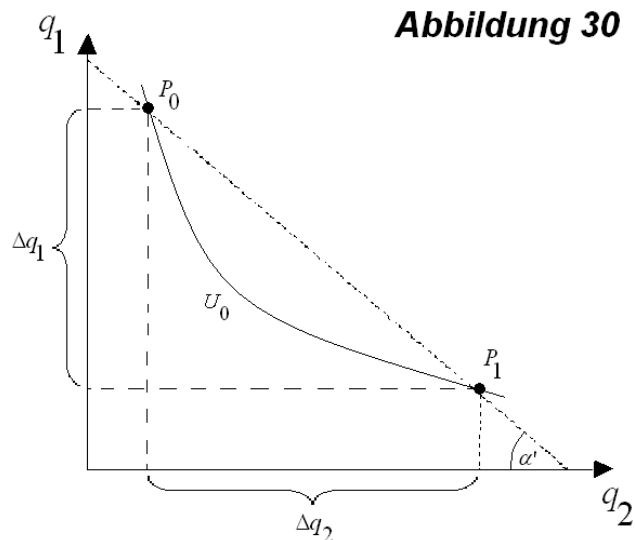
- (i) *Welche Verbrauchsmengenkombinationen stiften dem Haushalt den gleichen Nutzen wie die Verbrauchsmengenkombination P_0 ?*
- (ii) *Welche Verbrauchsmengenkombinationen stiften dem Haushalt einen höheren bzw. geringeren Nutzen wie die Verbrauchsmengenkombination P_0 ?*

Zu (i): Zur Beantwortung der Frage (i) stellen wir mit dem Haushalt ein Gedankenexperiment an. Ausgangspunkt sei das Güterbündel P_0 . Der Haushalt wird gefragt: „Auf wie viel Einheiten des Gutes 1 würdest du verzichten, wenn du eine Einheit des Gutes 2 zusätzlich erhältst?“ Der Haushalt soll also angeben, wie viel weniger vom Gut 1 ein Güterbündel enthalten kann, das eine Einheit vom Gut 2 mehr enthält, und den gleichen Nutzen stiftet wie P_0 . Die Antwort des Haushalts könnte lauten: „Für eine

zusätzliche Einheit des Gutes 2 bin ich bereit, auf drei Einheiten des Gutes 1 zu verzichten.“ Das ist auch in Abbildung 1 eingetragen. Wir können feststellen: Das Güterbündel P_1 stiftet dem Haushalt den gleichen Nutzen wie das Güterbündel P_0 . Wir können von P_1 ausgehend die Fragestellung wiederholen. Wird der Haushalt jetzt die gleiche Antwort geben? Im Regelfall lautet die Antwort: Nein. Wahrscheinlich wird der Haushalt nicht auf drei sondern auf zwei Einheiten des Gutes 1 verzichten. Das liegt daran, dass das Güterbündel P_1 weniger vom Gut 1 enthält als P_0 . Damit ergibt sich das Güterbündel P_2 . Führt man diese Überlegung fort, so kommt man zu den Güterbündeln P_3 und P_4 . Der Haushalt ist immer bereit auf weniger des Gutes 2 zu verzichten für eine zusätzliche Einheit des Gutes 1.

Was ist das Gemeinsame der Güterbündel P_0, \dots, P_4 ? Das Gemeinsame ist: Sie stiften dem Haushalt den gleichen Nutzen. Er ist indifferent zwischen ihnen. Er findet alle diese Alternativen gleich Gut. Was ist der Unterschied? Der Unterschied ist: Die Güterbündel sind verschieden strukturiert. P_0 enthält mehr vom Gut 1 und weniger vom Gut 2 als P_1 , usw. Die Punkte P_0, \dots, P_4 liegen auf einer *Indifferenzkurve*.

Als *Indifferenzkurve* bezeichnet man die geometrische Darstellung aller Güterbündel, denen der Haushalt das gleiche Nutzenniveau U_0 zuordnet.



In der Abbildung 30 ist diese Indifferenzkurve dargestellt. Es wurden nur die Punkte P_0 und P_1 eingezeichnet. Die Indifferenzkurve fällt von links nach rechts. Darin kommt das *Substitutionsprinzip* zum Ausdruck: Man kann die Güter so gegeneinander ersetzen, dass das Nutzenniveau unverändert bleibt. Die Indifferenzkurve ist zum Nullpunkt hin durchgebogen. Das liegt daran, dass der Haushalt für eine zusätzliche Menge von Gut 2 immer weniger vom Gut 1 hinzugeben bereit ist. Also steckt der gleiche Grund dahinter, der in Abbildung 1 zu der abnehmenden Stufenhöhe der „Treppe“ führte.

Die Grenzrate der Substitution. Zu ihrer Ableitung betrachten wir die Abbildung 30. Wir haben gesehen, dass die Menge Δq_1 des 1. Gutes ohne Nutzenänderung durch die Menge Δq_2 des 2. Gutes ersetzt werden kann. Dividieren wir die ersetzte durch die ersetzende Menge, und es ergibt sich der Quotient $\Delta q_1 / \Delta q_2$. Er ist negativ, da Δq_1 negativ ist. Bezeichnen wir seinen Absolutbetrag mit $|\Delta q_1 / \Delta q_2|$. Dies ist die *Durchschnittsrate der Substitution* von Gut 1 durch Gut 2. Durch P_0 und P_1 verläuft eine gestrichelte Linie. Sie bildet mit der Abszisse den Winkel α' . Der Tangens dieses Winkels ist gleich der Durchschnittsrate der Substitution. Nun zur Grenzrate der Substitution: Lassen wir Δq_2 immer kleiner werden. Punkt P_1 rutscht dann an Punkt P_0 heran. Die gestrichelte Linie nähert sich in ihrem Verlauf einer Tangente an die Indifferenzlinie im Punkt P_0 . Das heißt ökonomisch: Man betrachtet die Ersetzung einer

sehr kleinen Menge des Gutes 1 durch die Ersetzung einer sehr kleinen Menge des Gutes 2. Das Verhältnis dieser beiden Größen ist die Grenzrate der Substitution.

Die Grenzrate der Substitution des Gutes 1 durch das Gut 2 ist gleich dem Verhältnis der ersetzten Menge des Gutes 1 zu der sie ersetzenden Menge des Gutes 2. Dabei wird von einer infinitesimal kleinen Gütermengenänderung ausgegangen.

Die Grenzrate der Substitution in einem beliebig gewählten Punkt P_0 der Indifferenzkurve ist dem Absolutbetrage nach gleich der Steigung der Indifferenzkurve in P_0 . Der Tangens des Winkels α in Abbildung 31 gibt die Grenzrate der Substitution von Gut 1 durch Gut 2 im Punkt P_0 an. Bezeichnet man die infinitesimal kleine ersetzte Menge des Gutes 1 mit dq_1 und die ersetzende Menge des Gutes 2 mit dq_2 , so gilt

$$\tan \alpha = \left| \frac{dq_1}{dq_2} \right| \quad \text{Grenzrate der Substitution} \quad (0.2)$$

Die Grenzrate der Substitution nimmt nach Abbildung 31 nach rechts ab, weil α immer kleiner wird. Damit erhalten wir das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution:

Mit zunehmendem Verbrauch des ersetzenden Gutes nimmt die Grenzrate der Substitution des ersetzten durch das ersetzende Gut ab.

Zu (ii): Welche Güterbündel werden besser bzw. schlechter eingeschätzt als ein gegebenes Güterbündel P_0 (Abbildung 32)? Hier führen wir die Hypothese der *Unersättlichkeit* ein: ein Haushalt zieht ein Güterbündel einem anderen vor, wenn es von mindestens einem Gut mehr und von keinem Gut weniger enthält als das andere Güterbündel. Aus der Unersättlichkeitsannahme folgt: Alle Güterbündel, die durch Punkte im gepunkteten Bereich rechts oberhalb von P_0 dargestellt werden (Abbildung 32), werden dem Güterbündel P_0 vorgezogen. Alle Punkte im waagrecht schraffierten Bereich links unterhalb von P_0 werden geringer geschätzt als P_0 . Das Bündel Q_0 wird ihnen vorgezogen. Somit wird auch Q_0 höher geschätzt als P_0 . Stellt man die Güterbündel dar, die zu dem gleichen Nutzenniveau führen wie Q_0 , erhält man die Indifferenzlinie U_1 . Es gilt $U_1 > U_0$. Indifferenzkurven können sich nicht schneiden. Das ergibt sich aus der *Konsistenz* der Nutzenschätzungen. Wenn das am Punkt P_0 passieren würde, würde es bedeuten, dass er sich selber

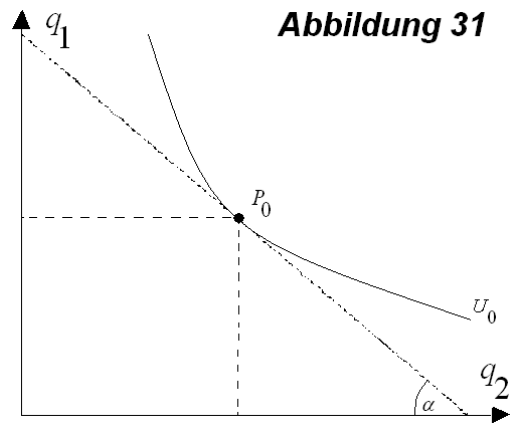
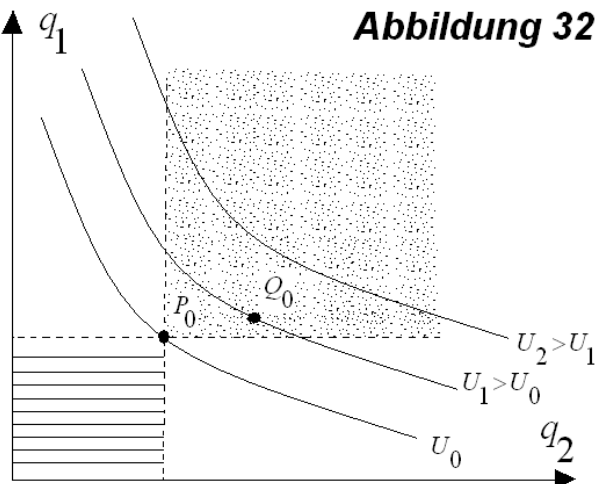


Abbildung 32



vorzieht und das ist natürlich Unsinn. In Abbildung 32 sind drei Indifferenzkurven eingezeichnet mit $U_2 > U_1 > U_0$. Sie bilden eine *Indifferenzkurvenschar*.

Wir können unsere Überlegungen wie folgt zusammenfassen: Unter den Bedingungen der

- a) abnehmenden Grenzrate der Substitution,
- b) Hypothese der Unersättlichkeit,
- c) Konsistenz

können die Nutzenschätzungen des Haushalts hinsichtlich zweier Güter durch eine Indifferenzkurvenschar (ein Indifferenzkurvensystem) wiedergegeben werden. Abbildung 32 stellt die Eigenschaften geometrisch dar, die der Nutzenfunktion (Gl. (0.1)) üblicherweise zugeschrieben werden.

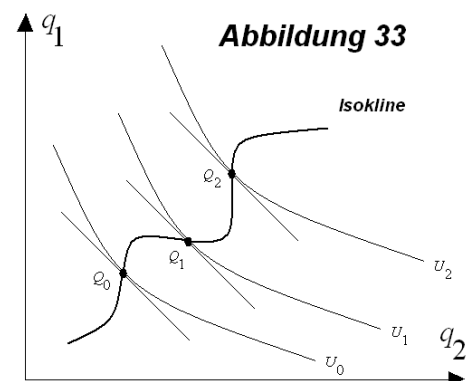
Ökonomen setzen zwei hauptsächliche Bedingungen an den Nutzenfunktionen voraus. Das heisst, jede Funktion soll monoton und konvex sein. Diese Eigenschaften heißen *regulierende Bedingungen* (English: *regulatory conditions*). Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, sagt man von der Nutzenfunktion sie sei „wohlerzogen“ (English: well-behaved). Wenn sie nicht erfüllt sind, kann das Verhalten der Nutzenfunktion sogar ökonomisch contraintuitiv sein. Man formuliert sie, wie folgt:

$$\partial U / \partial q_i > 0 \quad \text{mit } i=1,2 \rightarrow \text{Monotonie} \quad (0.3)$$

$$\partial^2 U / \partial^2 q_i < 0 \quad \text{mit } i=1,2 \rightarrow \text{Konvexität} \quad (0.4)$$

Die erste Gleichung entspricht der Annahme der Unersättlichkeit: „je mehr umso besser“. Die zweite besagt: „je mehr ich habe, umso weniger glücklich macht mich eine weitere Einheit vom Gut i“.

Isoklinen (s. Abb. 33): Als *Isokline* bezeichnet man die Verbindungslinie aller Punkte verschiedener Indifferenzkurven mit übereinstimmenden Grenzraten der Substitution. Isoklinen können ganz verschiedene Verläufe haben, so dass sich nichts allgemein über ihren Verlauf sagen lässt. Ein Spezialfall sind die *homothetischen Nutzenfunktionen*, bei den die Isoklinen Geraden aus dem Nullpunkt sind.



Die Budgetrestriktion.

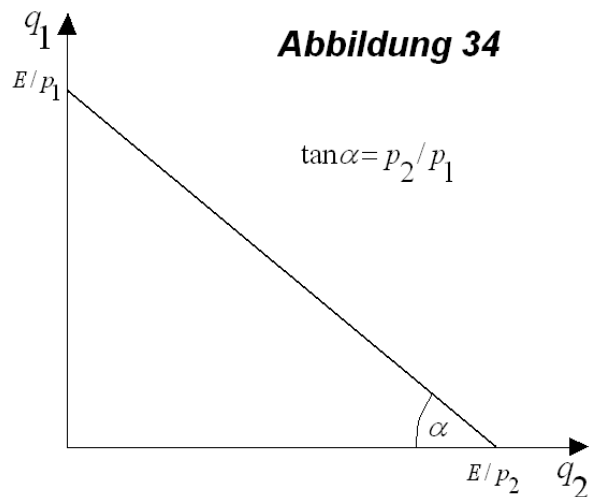
Bis jetzt wurden nur die Nutzenschätzungen des Haushalts und ihre Erfassbarkeit behandelt. Nun kommen wir zu seiner Budgetrestriktion. Wir gehen davon aus, der Haushalt verbrauche nur zwei Güter. Ihre Preise sind p_1 und p_2 . Das Geldeinkommen des Haushalts beträgt E . Die Budgetrestriktion des Haushalts lautet dann:

$$E \leq p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 \rightarrow \text{Budgetrestriktion} \quad (0.5)$$

Diese Restriktion besagt, dass der Haushalt nicht mehr Geld ausgeben kann, als er an Einkommen erzielt.

Stellt man die Budgetrestriktion graphisch dar, ergibt sich die sogenannte *Budgetlinie* in Abbildung 34. Mit dem vorgegebenem Einkommen kann der Haushalt alle diejenigen

Güterbündel erwerben, die durch Punkte entlang oder unterhalb der Linie dargestellt sind. Dabei repräsentieren alle Punkte auf der Linie Situationen, in denen der Haushalt sein Geld völlig ausgibt. Kauft er nur das Gut 1, kann er davon maximal die Menge E/p_1 erwerben. Kauft der Haushalt nur das Gut 2, kann er davon maximal die Menge E/p_2 erwerben. Die Steigung der Budgetlinie beträgt $\tan \alpha = p_2/p_1$. Die Budgetrestriktion trennt das Realisierbare vom Nichtrealisierbaren. Güterbündeln oberhalb von der Budgetlinie kann der Haushalt nicht erlangen. Der Haushalt hat nicht genug Geld, um alle seine Wünsche zu erfüllen.

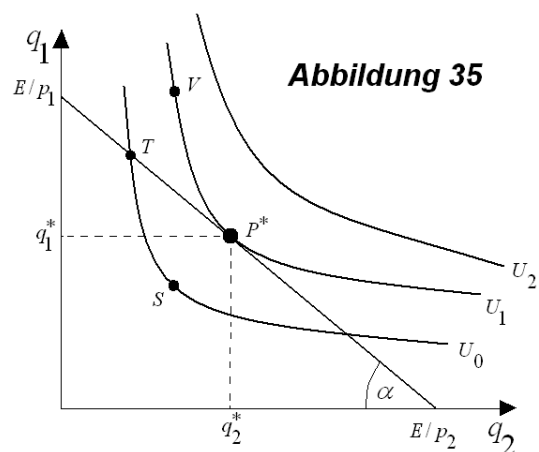


Die Lage der Budgetlinie hängt von den Preisen und dem Einkommen ab. Wie wirkt sich eine Einkommenssteigerung aus, wenn die Preise unverändert bleiben? Bleiben die Preise unverändert, so bleibt auch der Winkel α unverändert. Die Verbrauchsmöglichkeiten erweitern sich. Die Budgetlinie verschiebt sich parallel nach rechts oben. Was passiert, wenn der Preis vom Gut 1 steigt und alles andere unverändert bleibt? Der Punkt E/p_1 rutscht nach unten. Der Winkel α wird kleiner. Die maximal erwerbende Menge von Gut 1 sinkt. Die Konsummöglichkeiten verringern sich. Was geschieht, wenn beide Preise um gleiche Prozentsätze steigen und das Einkommen unverändert bleibt? Steigen beide Preise um den gleichen Prozentsatz, so bleibt das Preisverhältnis erhalten. Der Winkel α bleibt also auch erhalten. Die Konsummöglichkeiten verringern sich jedoch. Die Preise sind höher, das Geldeinkommen ist unverändert geblieben. Die Budgetlinie verändert sich parallel nach rechts unten.

Das Haushaltsoptimum.

Nach der Diskussion der Möglichkeiten zur Beschreibung der Nutzenschätzungen des Haushalts und der Darstellung der Budgetrestriktion bringen wir nun beide Bausteine zusammen (Abbildung 35). Das hier zu lösende Problem lautet: Welche Mengenkombinationen der beiden Güter wird der Haushalt angesichts seiner Budgetrestriktion und unter Beachtung seiner Präferenzen für die einzelnen Güterbündeln auswählen? Wie viel vom Gut 1 und wie viel vom Gut 2 wird er erwerben?

Wir wissen: Das Ziel des Haushalts ist es seinen Nutzen zu maximieren. Er wird sich also nicht für irgendeinen Güterbündel entscheiden. Wir wissen auch: Alle Güterbündel entlang und unterhalb von der Budgetlinie stehen dem Haushalt zur Verfügung. Er könnte z.B. S wählen und das Niveau U_0 realisieren. Den gleichen Nutzen könnte er mittels T realisieren. Er wird jedoch keiner dieser beiden Möglichkeiten wählen. Er will seinen Nutzen maximieren, d.h. er muss so entscheiden, dass er eine möglichst hohe Indifferenzlinie erreicht, das gewählte Güterbündel aber noch bezahlen kann.



Diesem Erfordernis genügt nur ein einziges Güterbündel: Es wird durch den Tangentialpunkt P^* der höchsterreichbaren Indifferenzlinie und der Budgetrestriktion dargestellt. Warum wählt er nicht T , das auch nicht mehr kostet als P^* ? Antwort: Weil T auf einer niedrigeren Indifferenzlinie liegt. Warum wählt er nicht das Güterbündel V , das doch den gleichen Nutzen stiftet wie das Güterbündel P^* ? Antwort: Weil er V nicht bezahlen kann, denn es liegt außerhalb der Budgetrestriktion. Die optimale Wahl ist also das Güterbündel P^* . Um das Nutzenmaximum zu realisieren, muss der Haushalt die Menge q_1^* von Gut 1 und die Menge q_2^* von Gut 2 erwerben.

Sehen wir uns das durch P^* festgelegte Haushaltsoptimum in Abbildung 35 genauer an. In diesem Punkt stimmen Indifferenzliniensteigung und Budgetliniensteigung gerade überein. D.h.: *Im Haushaltsoptimum ist die Grenzrate der Substitution vom Gut 1 durch das Gut 2 gleich dem Verhältnis der Preise von Gut 2 und Gut 1.* Das ist also, die Bedingung für das Haushaltsoptimum:

$$|dq_1 / dq_2| = p_2 / p_1 \quad (0.6)$$

Das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution gewährleistet die Existenz des Nutzenmaximums, und zwar eines eindeutigen Nutzenmaximums.

Algebraische Ableitung der Optimalbedingung.

Nunmehr soll die geometrisch gefundene Optimalbedingung algebraisch abgeleitet werden, und zwar mit der Methode von Lagrange. Formal handelt es sich hier um das Problem der Maximierung einer Funktion (der Nutzenfunktion) unter einer Nebenbedingung (der Budgetrestriktion):

$$\begin{aligned} \max \quad & U(q_1, q_2) \quad (0.7) \\ \text{N.B.} \quad & E - p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 = 0 \end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Maximierungsproblems wird die *Lagrange-Funktion*

$$L = U(q_1, q_2) + \lambda \cdot (E - p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2) \quad (0.8)$$

gebildet. λ ist der Lagrange-Multiplikator. Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum der Lagrange-Funktion bezüglich q_1 und q_2 , sind die gleichen wie für die Nutzenfunktion. Man erhält sie durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach q_1 , q_2 und λ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \lambda \cdot p_1 = 0 \quad (0.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2} - \lambda \cdot p_2 = 0 \quad (0.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E - p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 = 0 \quad (0.11)$$

Die erste Gleichung in Kombination mit der zweiten ergibt:

$$\frac{\partial U / \partial q_2}{\partial U / \partial q_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (0.12)$$

Diese Bedingung ist mit Gl. (0.6) identisch. Um das zu zeigen, überprüfen wir zunächst, was es mit dem Ausdruck aus der linken Seite von Gleichung (0.12) auf sich hat, und zeigen dann, dass er zahlenmäßig mit der Grenzrate der Substitution übereinstimmt. Schauen wir uns das totale Differential der Nutzenfunktion $U(q_1, q_2)$ an. Das ergibt:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 \quad (0.13)$$

Mit Hilfe von (0.13) wollen wir aufzeigen, welche Beziehung zwischen dem Grenznutzen des Gutes 1 bzw. 2 und den partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion besteht. *Als Grenznutzen eines Gutes bezeichnet man diejenige Änderung des Nutzenniveaus, die einer Änderung seiner Verbrauchsmenge um eine Einheit bei unveränderten Verbrauchsmengen der sonstigen Güter folgt.* Die Annahme der Unersättlichkeit impliziert, dass die Grenznutzen der Güter stets positiv sind. Wir bestimmen nun den Grenznutzen des Gutes 1 und des Gutes 2 nach dieser Definition. Das ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Grenznutzen von Gut 1} &= \partial U / \partial q_1 \\ \text{Grenznutzen von Gut 2} &= \partial U / \partial q_2 \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die linke Seite von Gleichung (0.12) das Verhältnis der Grenznutzen von Gut 1 und Gut 2 angibt. Wir zeigen nun: *Das Verhältnis des Grenznutzens von Gut 2 zum Grenznutzen von Gut 1 stimmt in jedem Punkt der Indifferenzkurve mit der Grenzrate der Substitution des Gutes 1 durch das Gut 2 überein.* Das bedeutet:

$$\frac{\partial U / \partial q_2}{\partial U / \partial q_1} = \left| \frac{dq_2}{dq_1} \right| \quad (0.14)$$

Das gilt in jedem Punkt der Indifferenzkurve, nicht nur im Haushaltsoptimum. Zum Beweis von Gleichung (0.14) berücksichtigen wir, dass sie sich auf eine gegebene Indifferenzlinie bezieht. Entlang der Indifferenzlinie ist die Nutzenänderung gleich Null, es gilt also $dU = 0$. Durch Sortieren der Terme in (0.13) ergibt sich sofort (0.14). Die Schlussfolgerung der Gleichungen (0.6), (0.12) und (0.14) können, wie folgt, formuliert werden: Im Haushaltsoptimum stimmt die Grenzrate der Substitution mit dem Preisverhältnis überein. Oder im Haushaltsoptimum stimme das Verhältnis der Grenznutzen beider Güter mit dem Preisverhältnis überein.

Die Reaktion des Haushalts auf Änderungen der Randbedingungen.

Wenn dem Haushalt die Güterpreise bekannt sind und er ein bestimmtes Einkommen erzielt, so wird er, wie wir schon gezeigt haben, eine bestimmte Güternachfrage entfalten: Diejenige, die seinen Nutzen maximiert. Die Grundlage seiner Entscheidungen sind also die Güterpreise und das Einkommen. Wenn sie sich ändern, passt sich der Haushalt daran an, und dies wiederum so dass sein Nutzen maximiert wird.

Eine Nachfragefunktion gibt an, wie die Nachfragemenge eines Gutes mit den Preisen und dem Einkommen variiert.

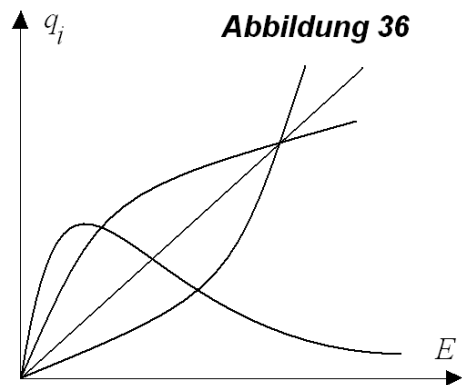
$$q_1^* = q_1^*(E, p_1, p_2) \quad (0.15)$$

$$q_2^* = q_2^*(E, p_1, p_2) \quad (0.16)$$

Für die Produzenten der Güter wäre es sehr angenehm, wenn sie die Eigenschaften dieser Nachfragefunktionen kennen würden. Wenn sie ihre Beschaffenheit kennen würden, d.h. wie viel nach alternativen Preisen und Einkommen jeweils nachgefragt wird, könnten sie sich mit ihren Produktionsplänen darauf einrichten. Zur Ermittlung der Beschaffenheit der Nachfragefunktionen müssen wir auf das hinter ihnen stehende Nutzenmaximierungskalkül zurückgreifen.

Nun können wir die Frage stellen: Wie variieren die nachgefragten Mengen beider Güter mit der Höhe des Einkommens? Wie verändern sich die nachgefragten Mengen bei Veränderung der Güterpreise?

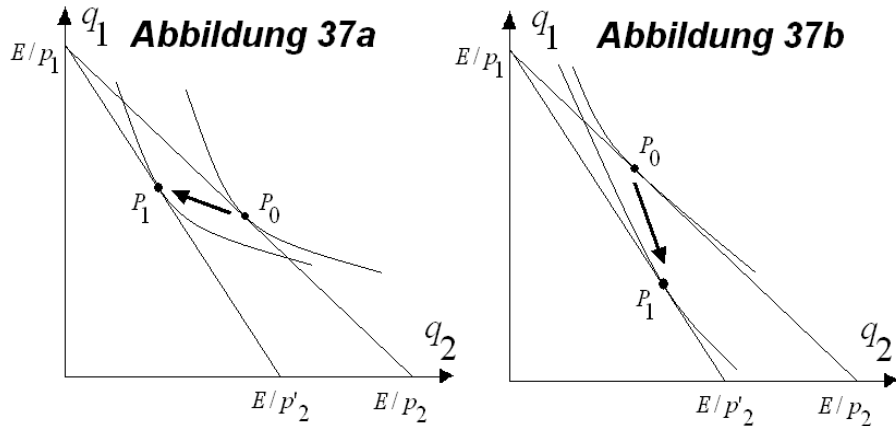
Die Engel-Kurve. Wir erteilen allen Güterpreisen konstante Werte und fragen, wie die mengenmäßige Nachfrage nach einem Gut mit der Höhe des Einkommens variiert. Die resultierende Darstellung dieses Zusammenhangs heisst Engel-Kurve. *Die Engel-Kurve für ein Gut i zeigt, welche Mengen des Gutes bei alternativen Einkommenshöhen jeweils nachgefragt werden.* Es handelt sich also um eine (q_i, E) -Darstellung. *Als Einkommens-Konsum-Kurve bezeichnet man die Verbindungslinie aller nutzenmaximierenden Güterbündeln bei alternativen Einkommenshöhen.* Es handelt sich also um eine (q_1, q_2) -Darstellung. Einkommensänderung haben zur Folge, dass sich die Budgetlinie nach oben parallel verschiebt. Für neue Einkommenswerte ergeben sich neue Budgetlinien und damit andere höhere Haushaltsoptima in Abbildung 35. Der Verlauf einer solchen Kurve kann nicht allgemein angegeben werden. Er hängt von der Beschaffenheit der Nutzenfunktion ab. Wenn die Nutzenfunktion homothetisch ist, dann verläuft die Engel-Kurve linear durch den Nullpunkt und steigend. In Abbildung 36 sieht man unterschiedliche mögliche Verläufe einer Engel-Kurve. Die lineare entspricht einer homothetischen Nutzenfunktion. Die nichtlineare konkave monoton steigende Kurve entspricht einem *relativ superioren* Gut, weil es einkommenselastisch nachgefragt wird. Die nichtlineare konvexe monoton fallende Kurve, entspricht einem *relativ inferioren* Gut, weil es einkommensunelastisch nachgefragt wird. Bei dem letzten Verlauf handelt es sich um ein *inferiores* Gut. Inferiore Güter sind solche die bei steigendem Einkommen immer weniger nachgefragt werden (z.B. minderwertige Nahrungsmittel). Wir können



zusammenfassend feststellen: Aus dem Indifferenzkurvensystem des Haushalts lassen sich alle möglichen Verläufe von Engel-Kurven ableiten. Das Indifferenzkurvensystem impliziert nicht eine ganz bestimmte Abhängigkeit der Nachfrage nach einem Gut vom Einkommen. Diese kann vielmehr für alle möglichen Güter unterschiedlich sein. Die Verläufe von Engel-Kurven sind durch empirische Untersuchungen zu ermitteln.

Güterpreise und Güternachfrage. Wie wirkt sich die Änderung des Preises eines Gutes bei konstantem Preis des anderen Gutes und konstantem Einkommen auf die Nachfrage der Güter aus? Betrachten wir eine Erhöhung des Preises von Gut 2. Sie äußert sich in einer Drehung der Budgetlinie (Abbildung 37a). In Abbildung 37a erscheint die Folgewirkung der Steigerung des Preises von Gut 2 nicht sonderlich überraschend: Vom teurer gewordenen Gut wird weniger verbraucht, der Verbrauch des anderen Gutes ist leicht gestiegen. Das muss aber nicht immer eintreffen. Das zeigt uns Abbildung 37b:

Obwohl die Indifferenzlinien den „richtigen“ Verlauf haben, hat der Verbrauch des teuer gewordenen Gutes hier zugenommen. Eine Nachfragekurve ordnet alternativen Preisen eines Gutes i die von ihm jeweils nachgefragte Menge zu. Es handelt sich um eine (q_i, p_i) -Darstellung. Sie hat im Normalfall eine negative Steigung. Eine Preis-Konsum-Kurve bezeichnet man die Verbindungslinie aller Optimalpunkte im Indifferenzkurvensystem bei alternativen Werten eines Güterpreises. Es handelt sich um eine (q_1, q_2) -Darstellung. Sie ist für die Nachfragekurve das, was die Einkommens-Konsum-Kurve für die Engel-Kurve ist.



Appendix 1

Stone-Geary-Nutzenfunktion. Seien $\gamma_i, b_i > 0$. Die Funktion ist definiert als

$$U = \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \ln(q_i - \gamma_i) \Rightarrow q_i = \gamma_i + c_i \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{\gamma_1 + c_1}{\gamma_2 + c_2} \text{ mit } c_i = b_i \cdot \frac{E - p_1 \cdot \gamma_1 - p_2 \cdot \gamma_2}{p_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(q_1 / q_2)}{dE} = \frac{b_1 / p_1}{\gamma_2 + c_2} - \frac{(\gamma_1 + c_1)b_2 / p_2}{(\gamma_2 + c_2)^2}$$

Wenn wir uns fragen, für welche Werte die Ungleichung $d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0$ erfüllt ist, ergibt sich dann folgendes:

$$d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow p_2 / p_1 \leq \text{bzw.} \geq \gamma_1 b_2 / \gamma_2 b_1$$

Appendix 2

Direkte Houthakker-Nutzenfunktion. Seien $0 < a_i < 1$ und $0 < b_i < 1$. Die Nutzenfunktion ist definiert als

$$U = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot q_i^{b_i} \Rightarrow q_i = \left(\frac{a_i \cdot b_i \cdot E / p_i}{\sum_j a_j \cdot b_j \cdot q_j^{b_j}} \right)^{\frac{1}{1-b_i}} \Rightarrow$$

$$q_1 / q_2 = \left(\frac{a_1 \cdot b_1 / p_1}{\sum_j a_j \cdot b_j \cdot q_j^{b_j}} \right)^{\frac{1}{1-b_1}} \cdot \left(\frac{\sum_j a_j \cdot b_j \cdot q_j^{b_j}}{a_2 \cdot b_2 / p_2} \right)^{\frac{1}{1-b_2}} \cdot E^{\frac{1}{1-b_1} - \frac{1}{1-b_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE = \left(\frac{a_1 \cdot b_1 / p_1}{\sum_j a_j \cdot b_j \cdot q_j^{b_j}} \right)^{\frac{1}{1-b_1}} \cdot \left(\frac{\sum_j a_j \cdot b_j \cdot q_j^{b_j}}{a_2 \cdot b_2 / p_2} \right)^{\frac{1}{1-b_2}} \cdot E^{\frac{1}{1-b_1} - \frac{1}{1-b_2} - 1} \cdot \left(\frac{1}{1-b_1} - \frac{1}{1-b_2} \right)$$

Jetzt müssen wir die Frage beantworten, wann die Ungleichung $d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0$ erfüllt ist. Man sieht, dass alle Terme der Ableitung positiv sein müssen ausser der aller letzte. Wir müssen eine Fallunterscheidung machen, um diese Frage beantworten zu

können:

Falls $b_1 - b_2 > 0 \Rightarrow d(q_1/q_2)/dE \geq 0 \Leftrightarrow p_2^{\frac{1-b_1}{1-b_2}}/p_1 \geq 0$ und diese letzte Ungleichung ist immer erfüllt, weil die linke Seite mit den Preisen nie negativ sein darf (weil Preise stets einen positiven Wert haben). Also für diesen ersten Fall gilt, dass $d(q_1/q_2)/dE$ immer positiv ist.

Falls $b_1 - b_2 < 0 \Rightarrow d(q_1/q_2)/dE \leq 0 \Leftrightarrow -p_2^{\frac{1-b_1}{1-b_2}}/p_1 \leq 0$ und diese letzte Ungleichung ist immer erfüllt, weil die linke Seite mit den Preisen immer negativ sein wird (weil Preise stets einen positiven Wert haben). Also für diesen ersten Fall gilt, dass $d(q_1/q_2)/dE$ immer negativ ist.

Appendix 3

S-Branch-Nutzenfunktion. Seien $b_i^{(s)} > 0$, $\gamma_i^{(s)} \geq 0$, $q_i^{(s)} - \gamma_i^{(s)} > 0$, $a^{(s)} > 0$, $\rho(s) = (\sigma(s) - 1) / \sigma(s)$ und $\sigma = 1/(1 + \rho)$. Die Nutzenfunktion ist definiert als

$$U = \left[\sum_{s=1}^S a^{(s)} \cdot \left\{ \sum_{i \in S} b_i^{(s)} \cdot (q_i^{(s)} - \gamma_i^{(s)})^{\rho(s)} \right\}^{\rho/\rho(s)} \right]^{1/\rho}$$

Der Fall S=1 reicht, um die Eigenschaften der Funktion zu verstehen. Man erhält dann:

$$q_i = \gamma_i + (b_i/p_i)^\sigma \cdot \left[\sum_{j=1}^2 (b_j/p_j)^\sigma \cdot p_j \right]^{-1} \cdot \left(E - \sum_{j=1}^2 \gamma_j p_j \right) \Rightarrow$$

$$q_1/q_2 = \frac{p_2(\gamma_1(b_2/p_2)^\sigma - \gamma_2(b_1/p_1)^\sigma) + E(b_1/p_1)^\sigma}{p_1(\gamma_2(b_1/p_1)^\sigma - \gamma_1(b_2/p_2)^\sigma) + E(b_2/p_2)^\sigma}$$

Der Einfachheit halber werden wir folgende Abkürzungen benutzen:

$$\text{Zeller} = p_2(\gamma_1(b_2/p_2)^\sigma - \gamma_2(b_1/p_1)^\sigma) + E(b_1/p_1)^\sigma$$

$$\text{Nenner} = p_1(\gamma_2(b_1/p_1)^\sigma - \gamma_1(b_2/p_2)^\sigma) + E(b_2/p_2)^\sigma$$

$$\Rightarrow d(q_1/q_2)/dE = \left[\frac{(b_1/p_1)^\sigma}{\text{Nenner}} - \frac{\text{Zeller} \cdot (b_2/p_2)^\sigma}{\text{Nenner}^2} \right] \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\text{Nenner} \cdot (b_1/p_1)^\sigma - \text{Zeller} \cdot (b_2/p_2)^\sigma \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$(\gamma_2 b_1)^{2\sigma} - (p_2/p_1)^{-\sigma} (\gamma_1 b_1^\sigma b_2^\sigma) \leq \text{bzw.} \geq (\gamma_1 b_2^{2\sigma}) (p_2/p_1)^{1-2\sigma} - (\gamma_2 b_1^\sigma b_2^\sigma) (p_2/p_1)^{1-\sigma}$$

$$\Rightarrow d(q_1/q_2)/dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow a - bx^{1-2\sigma} + (cx-1)x^{-\sigma} \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\text{mit } x = p_2/p_1, a = \gamma_2 b_1^\sigma / \gamma_1 b_2^\sigma, b = b_2^{2\sigma} \text{ und } c = \gamma_2 / \gamma_1$$

Appendix 4

Transzendente logarithmische Nutzenfunktion. Die Nutzenfunktion definiert man, wie folgt: (sei $b_{ji} = b_{ij}$)

$$-\ln U = \ln a_0 + \sum_{i=1}^2 a_i \ln q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \ln q_i \ln q_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{E}{p_i} \cdot \frac{a_i + \sum_j b_{ij} \ln(p_j/E)}{a_i + \sum_j b_{ij} \ln(p_j/E) + a_j + \sum_i b_{ij} \ln(p_i/E)}$$

$$\Rightarrow q_1 / q_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{a_1 + b_{11} \ln(p_1 / E) + b_{12} \ln(p_2 / E)}{a_2 + b_{21} \ln(p_1 / E) + b_{22} \ln(p_2 / E)}$$

Wir benutzen der Einfachheit halber folgende Abkürzungen:

$$\text{Zeller} = a_1 + b_{11} \ln(p_1 / E) + b_{12} \ln(p_2 / E) ; \text{Nenner} = a_2 + b_{21} \ln(p_1 / E) + b_{22} \ln(p_2 / E)$$

$$\Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE = \frac{p_2}{p_1} \cdot \left[\frac{-b_{11} / E - b_{12} / E}{\text{Nenner}} - \frac{\text{Zeller} \cdot (-b_{21} / E - b_{22} / E)}{\text{Nenner}^2} \right] \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Zeller} \cdot (b_{21} + b_{22}) - \text{Nenner} \cdot (b_{11} + b_{12}) \leq \text{bzw.} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \text{Zeller} - \text{Nenner} \cdot \gamma \leq \text{bzw.} \geq 0$$

mit $\gamma = (b_{11} + b_{12}) / (b_{21} + b_{22})$

$$\Leftrightarrow a_1 - \gamma \cdot a_2 + (b_{11} - \gamma b_{21}) \ln(p_1 / E) + (b_{12} - \gamma b_{22}) \ln(p_2 / E) \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \ln(p_2 / p_1) \leq \text{bzw.} \geq \gamma \cdot a_2 - a_1 \quad \text{mit} \quad \lambda = (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) / (b_{21} + b_{22})$$

$$\Leftrightarrow p_2 / p_1 \geq \text{bzw.} \leq e^{(\gamma a_2 - a_1) / \lambda} = \text{const} > 0$$

$$\Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \quad \Leftrightarrow p_2 / p_1 \geq \text{bzw.} \leq e^{(a_1 - \gamma a_2) / \lambda}.$$

Appendix 5

Transzendente logarithmische Nutzenfunktion (das quasi-ideale Nachfragesystem). Die entsprechende Nutzenfunktion ist definiert als

$$\ln[C(u, p)] = (1 - \mu) \ln[a(p)] + \mu \ln[b(p)] \quad \Rightarrow \quad q_i = (a_i + \sum_{j=1}^2 b_{ij} \ln p_j + b_i \ln(E / P)) E / p_i$$

$$\Rightarrow q_1 / q_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{a_1 + b_{11} \ln p_1 + b_{12} \ln p_2 + b_1 \ln(E / P)}{a_2 + b_{21} \ln p_1 + b_{22} \ln p_2 + b_2 \ln(E / P)}$$

Wir benutzen der Einfachheit halber folgende Abkürzungen:

$$\text{Zeller} = a_1 + b_{11} \ln p_1 + b_{12} \ln p_2 + b_1 \ln(E / P)$$

$$\text{Nenner} = a_2 + b_{21} \ln p_1 + b_{22} \ln p_2 + b_2 \ln(E / P)$$

$$\Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE = \frac{p_2}{p_1} \cdot \left[\frac{b_1 / E}{\text{Nenner}} - \frac{\text{Zeller} \cdot (b_2 / E)}{\text{Nenner}^2} \right] \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Zeller} \cdot b_2 - \text{Nenner} \cdot b_1 \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b_2 b_{12} - b_1 b_{22}) \ln p_2 - (b_1 b_{21} - b_2 b_{11}) \ln p_1 \leq \text{bzw.} \geq b_1 a_2 - b_2 a_1$$

Mit $b_2 b_{12} - b_1 b_{22} = b_1 b_{21} - b_2 b_{11}$ weil $b_1 (b_{21} + b_{22}) = b_2 (b_{12} + b_{11})$ und zwar $\forall b_1, b_2$, und das wiederum gilt weil folgende Einschränkung gilt: $\sum_j b_{ij} = 0$.

$$\Rightarrow (b_1 b_{21} - b_2 b_{11}) \ln(p_2 / p_1) \leq \text{bzw.} \geq b_1 a_2 - b_2 a_1$$

$$\Leftrightarrow p_2 / p_1 \leq \text{bzw.} \geq e^\kappa \quad \text{mit} \quad \kappa = (a_2 b_1 - a_1 b_2) / (b_{21} b_1 - b_{11} b_2)$$

$$\Rightarrow d(q_1 / q_2) / dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \quad \Leftrightarrow p_2 / p_1 \leq \text{bzw.} \geq e^\kappa \quad \text{mit} \quad \kappa = (a_2 b_1 - a_1 b_2) / (b_{21} b_1 - b_{11} b_2).$$

Appendix 6

CES-Translog-Nutzenfunktion. Es gilt für die Nutzenfunktion die Gleichung

$$-\ln U = a_0 + \frac{1}{1 - \sigma} \ln \left(\sum_{i=1}^2 a_i \ln q_i^{1 - \sigma} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} \ln q_i \ln q_j$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{E}{p_i} \cdot \frac{a_i(p_i/E) / [\sum_k a_k(p_k/E)^{1-\sigma}] + \sum_j b_{ij}(p_j/E)}{1 + \sum_k \sum_i b_{kj} \ln(p_j/E)}$$

$$\Rightarrow q_1/q_2 = \frac{[1 + (a_2/a_1) \cdot (p_2/p_1)^{1-\sigma}]^{-1} + b_{11} \ln(p_1/E) + b_{12} \ln(p_2/E)}{[1 + (a_1/a_2) \cdot (p_1/p_2)^{1-\sigma}]^{-1} + b_{12} \ln(p_1/E) + b_{22} \ln(p_2/E)}$$

Wir benutzen der Einfachheit halber folgende Abkürzungen:

$$\text{Zeller} = [1 + (a_2/a_1) \cdot (p_2/p_1)^{1-\sigma}]^{-1} + b_{11} \ln(p_1/E) + b_{12} \ln(p_2/E)$$

$$\text{Nenner} = [1 + (a_1/a_2) \cdot (p_1/p_2)^{1-\sigma}]^{-1} + b_{12} \ln(p_1/E) + b_{22} \ln(p_2/E)$$

$$\Rightarrow d(q_1/q_2)/dE = \frac{-b_{11}/E - b_{12}/E}{\text{Nenner}} - \frac{\text{Zeller} \cdot (-b_{12}/E - b_{22}/E)}{\text{Nenner}^2} \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Zeller}(b_{12} + b_{22}) - \text{Nenner}(b_{11} + b_{12}) \leq \text{bzw.} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Zeller} - \kappa \cdot \text{Nenner} \leq \text{bzw.} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = (b_{11} + b_{12}) / (b_{12} + b_{22}).$$

$$\Leftrightarrow [1 + \frac{a_2}{a_1} (\frac{p_2}{p_1})^{1-\sigma}]^{-1} - \kappa [1 + \frac{a_1}{a_2} (\frac{p_1}{p_2})^{1-\sigma}]^{-1} + (b_{11} - b_{12}\kappa) \ln(p_1/E) + (b_{12} - b_{22}\kappa) \ln(p_2/E) \leq \text{bzw.} \geq 0$$

Nun müssen wir zeigen, dass $b_{11} - b_{12}\kappa = -(b_{12} - b_{22}\kappa)$. Es geht also um die Terme vor den Logarithmen. Wir wollen die beiden Logarithmen zu einem Einzigem machen. Das ist der Grund warum wir diese Beziehung zeigen wollen. Also,

$$\Rightarrow b_{11} - b_{12}\kappa = b_{11} - (b_{12}b_{11} + b_{12}b_{12}) / (b_{12} + b_{22}) = (b_{22}b_{11} + b_{12}^2) / (b_{12} + b_{22}) = \lambda$$

$$\Rightarrow b_{12} - b_{22}\kappa = b_{12} - (b_{22}b_{11} + b_{22}b_{12}) / (b_{12} + b_{22}) = -(b_{22}b_{11} + b_{12}^2) / (b_{12} + b_{22}) = -\lambda$$

Also die Beziehung ist erfüllt und wir können weitermachen:

$$\Rightarrow [1 + \frac{a_2}{a_1} (\frac{p_2}{p_1})^{1-\sigma}]^{-1} - \kappa [1 + \frac{a_1}{a_2} (\frac{p_1}{p_2})^{1-\sigma}]^{-1} + \lambda \ln(p_2/p_1) \leq \text{bzw.} \geq 0 \Rightarrow$$

$$d(q_1/q_2)/dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow [1 + \frac{a_2}{a_1} (\frac{p_2}{p_1})^{1-\sigma}]^{-1} - \kappa [1 + \frac{a_1}{a_2} (\frac{p_1}{p_2})^{1-\sigma}]^{-1} + \lambda \ln(p_2/p_1) \leq \text{bzw.} \geq 0$$

Oder anders geschrieben:

$$d(q_1/q_2)/dE \leq \text{bzw.} \geq 0 \Leftrightarrow [1 + ax^{1-\sigma}]^{-1} - \kappa [1 + (ax^{1-\sigma})^{-1}]^{-1} + \lambda \ln x \leq \text{bzw.} \geq 0$$

mit $x = p_2/p_1$, $a = a_2/a_1$, $\lambda = (b_{22}b_{11} + b_{12}^2) / (b_{12} + b_{22})$ und $\kappa = (b_{11} + b_{12}) / (b_{12} + b_{22})$.

Appendix 7

Appendix 7 beinhaltet die Tabellen mit den Input-Daten, die für die Simulation der empirischen $\beta_i(t)$ -Zeitverläufe notwendig sind.

Tabelle 4.

	Reich	Mittel	Arm	μ_i	β_i^p	β_i^{START}
Reich	-	$f_{32} = -0.1$	$f_{31} = -1.2$	0.6	0.47	0.52
Mittel	$f_{23} = 0.8$	-	$f_{21} = -1.1$	0.5	0.47	0.55
Arm	$f_{13} = 1$	$f_{12} = 0.1$	-	0.5	0.35	0.49

Andere relevante Parameter für diese Simulation sind:

$nt=15.000$, $\eta_t \in [-0.0003, 0.0003]$, $v=0.1$, $DT=0.01$, $\sigma=1.1$

Tabelle 5.

	Reich	Mittel	Arm	μ_i	β_i^P	β_i^{START}
Reich	-	$f_{32} = -0.8$	$f_{31} = -5.45$	1.95	0.27	0.44
Mittel	$f_{23} = 6$	-	$f_{21} = -3$	1.5	0.27	0.41
Arm	$f_{13} = 1$	$f_{12} = 3.3$	-	1	0.16	0.39

Andere relevante Parameter für diese Simulation sind:

nt=2.000, $\eta_i \in [-0.0003, 0.0003]$, $\nu = 0.1$, $DT = 0.01$, $\sigma = 1.1$

Tabelle 6.

	Reich	Mittel	Arm	μ_i	β_i^P	β_i^{START}
Reich	-	$f_{32} = -2.2$	$f_{31} = -3.4$	1.39	0.47	0.76
Mittel	$f_{23} = 4$	-	$f_{21} = -2$	1	0.3	0.62
Arm	$f_{13} = 3.4$	$f_{12} = -1$	-	0.74	0.47	0.71

Andere relevante Parameter für diese Simulation sind:

nt=9.000, $\eta_i \in [-0.00025, 0.00025]$, $\nu = 0.1$, $DT = 0.01$, $\sigma = 1.1$

Tabelle 7.

	Reich	Mittel	Arm	μ_i	β_i^P	β_i^{START}
Reich	-	$f_{32} = -1.9$	$f_{31} = -2.9$	1.5	0.88	0.47
Mittel	$f_{23} = 2.9$	-	$f_{21} = -2.9$	1	0.96	0.58
Arm	$f_{13} = 2.9$	$f_{12} = 1$	-	1	0.92	0.56

Andere relevante Parameter für diese Simulation sind:

nt=10.000, $\eta_i \in [-0.0003, 0.0003]$, $\nu = 0.1$, $DT = 0.01$, $\sigma = 1.1$

Programm Codes

Code 0

Gemeinsamer Teil zu allen *Lsmo*d-Programmen. Das Unterprogramm *parameter.txt*, das vom *Code 0* geöffnet wird, befindet sich unter *Code 0**.

```

;***** GEMEINSAMER TEIL ZU ALLEN LSMOD-PROGRAMMEN *****
;signum.pro
function signum,feld
f=feld
i=where(feld eq 0, num)
if num gt 0 then f(i)=0
i=where(feld gt 0, num)
if num gt 0 then f(i)=1
i=where(feld lt 0, num)
if num gt 0 then f(i)=-1
return,f
end

;Zeitenheit: Tage
zi=6
nt=4000 ;Anzahl der Zeitschritte
dt=zi/float(nt) ;Zeitschritt (d)
DT=0.01 ; Zeitschritt wie in C-
Programm

randmax=0.000 ;Maximaler Rauschterm
nue=0.1 ;Praferenz-Anpassungrate
(1/d)
input='parameter.txt' ;Parameter-Input

f=fltarr(3,3,3,3) ;"f": LG , Relation zu anderen
beta=fltarr(3,3) ; Beta1-Feld
betaa=fltarr(3,3) ; Anfangswert Beta1-Feld
betat=fltarr(3,3,nt) ; Zeitverlauf Beta1-Feld
dbeta=fltarr(3,3) ; Aenderung Beta1-Feld
fij=fltarr(3,3) ; Ausschnitt aus f
BETA_P=fltarr(3,3) ; Praerenz-Beta-Matrix
MUE=fltarr(3,3) ; Mue-Matrix

openr,1,input ;Einlesen f, beta(i,j), betap(i,j),
MUE(i,j): i=niedrig,mittel,hoch ;j=kons.,matr.,posm.
a=' '
h=fltarr(6)

```



```

readf,1,a
readf,1,a
readf,1,a
readf,1,h
f(2,1,1,1)=h(1)
f(2,1,0,1)=h(2)
mue(2,1)=h(3)
beta_p(2,1)=h(4)
betaa(2,1)=h(5)
readf,1,h
f(1,1,2,1)=h(0)
f(1,1,0,1)=h(2)
mue(1,1)=h(3)
beta_p(1,1)=h(4)
betaa(1,1)=h(5)
readf,1,h
f(0,1,2,1)=h(0)
f(0,1,1,1)=h(1)
mue(0,1)=h(3)
beta_p(0,1)=h(4)
betaa(0,1)=h(5)
close,1
beta=betaa

zeit=fltarr(nt)
hh=fltarr(nt)
for it=0,nt-1 do begin ;BEGINN ITERATION
zeit(it)=it*dt+1960

betat(*,*,it)=beta

```

```

for i=0,2 do for j=0,2 do begin ;Schleife ueber alle
LG
fij(*,*)=f(i,j,*,*)
§
endfor
beta=beta+DT*nue*dbeta
j=where(beta gt 1.,num)
if num gt 0 then beta(j)=1.
j=where(beta lt 0.,num)
if num gt 0 then beta(j)=0.
endfor ;ENDE ITERATION

window,2,xsize=1000,ysize=800
loadct,0
plot
,hh,yrange=[0.,1.],ytitle='BETA(i,j,t)',xtitle='JAHR',ba
ckground=rgb(255,255,255),color=0,$
title='TIME DEVELOPMENT OF BETA1(i,j)',$
subtitle='low-.. middle- - high--- trad.: blue,
material.:red, post-material.:green'
for i=0,2 do for j=1,1 do begin
if i eq 0 then c=rgb(0,0,255)
if i eq 1 then c=rgb(255,0,0)
if i eq 2 then c=rgb(0,255,0)
if j eq 0 then lst=0
if j eq 1 then lst=0
if j eq 2 then lst=0
oplot,betat(i,j,*),color=c,linestyle=lst,thick=2.0
endfor

end

```

Code 0*

Programm *parameter.txt*. Es beinhaltet alle Input-Parameter f_{ij} , μ_i , β_i^p und β_i^{start} des betrachteten Differentialgleichungssystems.

Parameter-file with input-parameters (only 3 consumer classes)

f(row, column):

Reich	Mittel	Arm	MUE	BETA_P	BETA_START	
0	3	-3	1	0.4	0.52	Reich
-3	0	-2	1.3	0.45	0.55	Mittel
3	2	0	1	0.35	0.49	Arm

Code 1

Programm *lsmo1*.

Man nehme den *Code 0* und ersetze das Symbol § durch die folgende Zeile:

```

dbeta(i,j)=(total( -1.*fij*signum(-beta+beta(i,j)) ) + $
MUE(i,j)*signum(BETA_P(i,j)-beta(i,j)))+randmax*2*(randomu(s)-0.5)/(dt*nue)

```

Code 2

Programm *lsmo2*.

Man nehme den *Code 0* und ersetze das Symbol § durch die folgende Zeile:

```

dbeta(i,j)=(total( -1.*fij*signum(-beta+beta(i,j)) ) + $
MUE(i,j)*signum(BETA_P(i,j)-beta(i,j)))+randmax*2*(randomu(s)-0.5)/(dt*nue)

```

Code 3

Programm *lsmo3*.

Man nehme den *Code 0* und ersetze das Symbol § durch die folgende Zeile:

```

dbeta(i,j)=(total( -1.*fij*signum(-beta+beta(i,j)) ) + $
MUE(i,j)*(BETA_P(i,j)-beta(i,j)))+randmax*2*(randomu(s)-0.5)/(dt*nue)

```

Code 4

Programm *lsmo4*.

Man nehme den *Code 0* und ersetze das Symbol § durch die folgende Zeile:

```
dbeta(i,j)=(total( -1.*fij*(-beta+beta(i,j)) ) + $
MUE(i,j)*signum(BETA_P(i,j)-beta(i,j)))+randmax*2*(randomu(s)-0.5)/(dt*nue)
```

Code 5

Programm *stab1*. Ermittelt die stabilen Fixpunkte des zweidimensionalen Systems *lsmo1*.

```
***** STABILITÄTSANALYSE VON LSMOD1 *****
;
ig=4.
deltal=.02
dimb1=1
dimb2=11
diml1=ig*2./deltal
diml2=ig*2./deltal
nfix=intarr(dimb1,dimb2,diml1,diml2)
e=0.0000001

for i=0,dimb1-1 do begin
  b1=.2
  for j=6,6 do begin
    b2=j*deltab
    for k=0,diml1-1 do begin
      l1=-ig+deltal*k
      for l=0,diml2-1 do begin
        l2=-ig+deltal*l
        n=0

        /*Die Bedingungen fuer beta1>beta2 werden
ueberprueft*/
        ;***B8***
        ;
        if (b1 lt 1+e) and (b1 gt 1-e) and (l1 lt e) then begin
          if (abs(l2) lt e) and (b2 lt 1-e) and (b2 gt e) then
            begin
              n=n+1
            end
          endif
        end
        if (b1 lt 1-e) and (l1 lt -1+e) then begin
          if (abs(l2) lt e) and (b2 lt 1-e) and (b2 gt e) then
            begin
              n=n+1
            end
          endif
        end
        endif

        ;***B1***
        ;
        if (b1 lt 1+e) and (b1 gt 1-e) and (l1 lt e) then begin
          if (abs(b2) lt e) and (l2 lt e) then begin
            n=n+1
          end
        end
        if (b2 gt e) and (l2 lt -1+e) then begin
          n=n+1
        end
        endif
        if (b1 lt 1-e) and (l1 lt -1+e) then begin
          if (abs(b2) lt e) and (l2 lt e) then begin
            n=n+1
          end
        end
        if (b2 gt e) and (l2 lt -1+e) then begin
          n=n+1
        end
        endif
        endif

        ;***B2***
        ;
        if (abs(b2) lt e) and (l2 lt e) then begin
          if (abs(l1) lt e) and (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) then
            begin
              n=n+1
            end
          endif
        end
      end
    end
  end
end

endif
if (b2 gt e) and (l2 lt -1+e) then begin
  if (abs(l1) lt e) and (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) then
    begin
      n=n+1
    end
  endif
endif

;***B9a***
;
if (abs(l1) lt e) and (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) then
  begin
    if (abs(l2) lt e) and (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) then
      begin
        n=n+1
      end
    endif
  end

;/*Die Bedingungen fuer beta1=beta2 werden
ueberprueft*/
;***B3-B7-B9b***
;
if (abs(b1-b2) lt e) then begin
  for a=1,20 do begin
    m=0.1*a
    if ((m*(1+l1)+1+l2)^2-4*m*(l1+l2+1) ge -e) then
      begin
        if ((-m*(1+l1)-1-l2+((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) and $
((m*(1+l1)-1-l2-((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) then begin ;reelle
          Fixpunkte
          n=n+1
          goto,jump1
        end
      end
    endif else begin
      if (m*(1+l1)+(1+l2) gt -e) then begin ;imaginäre
          Fixpunkte
          n=n+1
          goto,jump1
        end
      endelse
    endfor
  endif
  jump1:

;/*Die Bedingungen fuer beta1<beta2 werden
ueberprueft*/
;***B4***
;
if (abs(b1) lt e) and (l1 lt e) then begin
  if (abs(l2) lt e) and (b2 lt 1-e) and (b2 gt e) then
    begin
      n=n+1
    end
  endif
endif
if (b1 gt e) and (l1 lt -1+e) then begin
  if (abs(l2) lt e) and (b2 lt 1-e) and (b2 gt e) then
    begin
      n=n+1
    end
  endif
endif
endif
```

```

.***B5***
if (abs(b1) lt e) and (l1 lt e) then begin
if (b2 lt 1+e) and (b2 gt 1-e) and (l2 lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 lt 1-e) and (l2 lt -1+e) then begin
n=n+1
endif
endif
if (b1 gt e) and (l1 lt -1+e) then begin
if (b2 lt 1+e) and (b2 gt 1-e) and (l2 lt e) then begin
n=n+1
endif
endif
if (b2 lt 1-e) and (l2 lt -1+e) then begin
n=n+1
endif
endif

.***B6***
if (b2 lt 1+e) and (b2 gt 1-e) and (l2 lt e) then begin
if (abs(l1) lt e) and (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) then
begin
n=n+1
endif
endif
if (b2 lt 1-e) and (l2 lt -1+e) then begin
if (abs(l1) lt e) and (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) then
begin
n=n+1
endif
endif

.***B9c***
if (abs(l1) lt e) and (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) then
begin
if (abs(l2) lt e) and (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) then
begin
n=n+1
endif
endif

.***Überprüfung aller UNSTETIGEN Fixpunkte nur
falls b1 ungleich b2***
if (abs(b1-b2) gt e) then begin
.***B1***
if (l1-1 lt -e) and (l1 gt e) and (l2-1 lt -e) and (l2 gt e)
then begin
n=n+1
endif
.***B2***
if ((l1-1 lt -e) and (l1 gt e) and (l2 lt -e) and (l2+1 gt
e)) or ((l2-1 lt -e) and (l2 gt e) and (l1 lt -e) and (l1+1
gt e)) then begin
n=n+1
endif
.***B3***
if ((l1-1 lt -e) and (l1 gt e) and (l2-1 gt e)) or ((l2-1 lt -
e) and (l2 gt e) and (l1-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
.***B5***
if (l1 lt -e) and (l1+1 gt e) and (l2 lt -e) and (l2+1 gt
e) then begin

```

```

n=n+1
endif
.***B8***
if (l1-1 gt e) and (l2-1 gt e) then begin
n=n+1
endif
.***B4***
if ((l1-1 lt -e) and (l1 gt e) and (l2+1 lt -e)) or ((l2-1 lt
-e) and (l2 gt e) and (l1+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
.***B6***
if ((l1 lt -e) and (l1+1 gt e) and (l2-1 gt e)) or ((l2 lt -
e) and (l2+1 gt e) and (l1-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
.***B7***
if ((l1 lt -e) and (l1+1 gt e) and (l2+1 lt -e)) or ((l2 lt -
e) and (l2+1 gt e) and (l1+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
.***B9***
if ((l1-1 gt e) and (l2+1 lt -e)) or ((l2-1 gt e) and (l1+1
lt -e)) then begin
n=n+1
endif

nfix(i,j,k,l)=n

endfor
endfor
endfor

fnr=0
for i=0,dim1-1 do begin
b1=.2
for j=6,6 do begin
b2=j*deltab
s=' '
s='b1 =' + string(b1) + ' b2 =' + string(b2)
fnr=2
window,fnr,xsize=500,ysize=500
plot,[0,0],[0,0],xrange=[-3,3],yrange=[-
3,3],background=rgb(255,255,255),color=rgb(0,0,0),
$
xtitle='lambda1',ytitle='lambda2',title=s
for k=2,dim1-1 do begin
for l=2,dim1-1 do begin
if (nfix(i,j,k,l) eq 0) then c=rgb(255,255,255) ; weiss
if (nfix(i,j,k,l) eq 1) then c=rgb(0,0,255) ; blau
if (nfix(i,j,k,l) eq 2) then c=rgb(0,255,0) ; gruen
if (nfix(i,j,k,l) eq 3) then c=rgb(255,0,0) ; rot
if (nfix(i,j,k,l) eq 4) then c=rgb(0,0,0) ; schwarz

plots,-ig+deltal*k,-ig+deltal*l,psym=3,color=c
endfor
endfor
endfor
endfor
end

```

Code 6

Programm *stab2*. Ermittelt die stabilen Fixpunkte des zweidimensionalen Systems *lsmod2*.

```
***** STABILITÄTSANALYSE DES PROGRAMMS LSMOD2 *****
;
ig=4.
deltal=.02
dimb1=1
dimb2=11
diml1=(ig/deltal)*2
diml2=(ig/deltal)*2
nfix=intarr(dimb1,dimb2,diml1,diml2)
e=0.0000001

for i=0,dimb1-1 do begin
b1=.7
for j=7,7 do begin
b2=j*deltab
for k=0,diml1-1 do begin
l1=-ig+deltal*k
for l=0,diml2-1 do begin
l2=-ig+deltal*l
n=0

;***B1***
if ((b1-1-l1) gt -e) and ((b2+l2) lt e) then begin
n=n+1
endif

;***B2***
;
b1_f = b1/(1+l1)
if ((l2*b1_f+b2) lt e) and (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e)
and (l1 gt -1+e) then begin
n=n+1
endif

;***B4***
b2_f = b2/(1+l2)
if ((l1*b2_f+b1) lt e) and (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e)
and (l2 gt -1+e) then begin
n=n+1
endif

;***B5***
if ((b1+l1) lt e) and ((b2-l2-1) gt -e) then begin
n=n+1
endif

;***B6***
;
b1_f = (b1+l1)/(1+l1)
if ((l2*(b1_f-1)+b2-1) gt -e) and (b1_f gt e) and (b1_f
lt 1-e) and (l1 gt -1+e) then begin
n=n+1
endif

;***B3 und B7***
;
if (abs(b1-b2) lt e) and ((abs(b1) lt e) or (abs(b1-1) lt
e)) then begin
for a=1,20 do begin
m=0.1*a
if ((m*(1+l1)+1+l2)^2-4*m*(l1+l2+1) ge -e) then
begin
if ((-m*(1+l1)-1-l2+((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) and $
((-m*(1+l1)-1-l2-((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) then begin
n=n+1 ;stabile reele Fixpunkte
goto,jump1
endif
endif else begin
if (m*(1+l1)+(1+l2) gt -e) then begin
n=n+1 ;stabiler imaginaerer Fixpunkt
goto,jump1
endif
endif
endelse
endfor
endif
jump1:

;***B8***
;
b2_f = (l2+b2)/(l2+1)
if ((l1*(b2_f-1)+b1-1) gt -e) and (b2_f gt e) and (b2_f
lt 1-e) and (l2 gt -1+e) then begin
n=n+1
endif

;***B9***
;
b1_f = ((1+l2)*b1+l1*b2)/(l1+l2+1)
b2_f = ((1+l1)*b2+l2*b1)/(l1+l2+1)
if (abs(l1+l2+1) gt e) and (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e)
and (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) then begin
for a=1,20 do begin
m=0.1*a
if ((m*(1+l1)+1+l2)^2-4*m*(l1+l2+1) ge -e) then
begin
if ((-m*(1+l1)-1-l2+((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) and $
((-m*(1+l1)-1-l2-((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) then begin
n=n+1 ;stabiler reeler Fixpunkt
goto,jump2
endif
endif else begin
if (m*(1+l1)+(1+l2) gt -e) then begin
n=n+1 ;stabiler imaginärer Fixpunkt
goto,jump2
endif
endif
endelse
endfor
endif
jump2:

nfix(i,j,k,l)=n

endfor
endfor
endfor
endfor

fnr=0
for i=0,dimb1-1 do begin
b1=.7
for j=7,7 do begin
b2=j*deltab
s=' '
s='b1 =' +string(b1)+' b2 =' +string(b2)
fnr=4
window,fnr,xsize=500,ysize=500
plot,[0,0],[0,0],xrange=[-ig,ig],yrange=[-
ig,ig],background=rgb(255,255,255),color=rgb(0,0,0
),$
xtitle='lambda1',ytitle='lambda2',title=s
for k=2,diml1-1 do begin
```

```

for l=2,diml2-1 do begin
if (nfix(i,j,k,l) eq 0) then c=rgb(255,255,255) ; weiss
if (nfix(i,j,k,l) eq 1) then c=rgb(0,0,255) ; blau
if (nfix(i,j,k,l) eq 2) then c=rgb(0,255,0) ; gruen
if (nfix(i,j,k,l) eq 3) then c=rgb(255,0,0) ; rot
if (nfix(i,j,k,l) eq 50) then c=rgb(0,0,0) ; schwarz

```

```

plots,-ig+deltal*k,-ig+deltal*l,psym=3,color=c
endfor
endfor
endfor
endfor
end

```

Code 7

Programm *stab3*. Ermittelt die stabilen Fixpunkte des zweidimensionalen Systems *lsm3*.

```

***** STABILITÄTSANALYSE VON LSMOD3 *****
ig=4.
deltal=.04
dimb1=1
dimb2=11
diml1=ig*.2/deltal
diml2=ig*.2/deltal
nfix=intarr(dimb1,dimb2,diml1,diml2)
e=0.0000001
a=100000000000

for i=0,dimb1-1 do begin
b1=.3
for j=5,5 do begin
b2=j*deltal
for k=0,diml1-1 do begin
l1=-ig+deltal*k
for l=0,diml2-1 do begin
l2=-ig+deltal*l
n=0

/*Die 4 Bedingungen fuer beta1>beta2 werden ueberprueft*/
if (b1-b2-l1-l2 gt e) then begin
if (b1-1-l1 gt -e) and (b2+l2 gt e) and (b2+l2 lt 1-e)
then begin
n=n+1
endif
if (b1-1-l1 gt -e) and (b2+l2 lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b1-l1 lt 1-e) and (b1-l1 gt e) and (b2+l2 lt e) then
begin
n=n+1
endif
if (b1-l1 lt 1-e) and (b1-l1 gt e) and (b2+l2 gt e) and
(b2+l2 lt 1-e) then begin
n=n+1
endif
endif

/*Die 3 Bedingungen fuer beta1=beta2 werden ueberprueft*/
if (abs(b1-b2) lt e) then begin
for h=1,20 do begin
m=0.1*h
if ((m*(1+l1)+1+l2)^2-4*m*(l1+l2+1) ge -e) then begin
if ((-m*(1+l1)-1-l2+((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) and $
((-m*(1+l1)-1-l2-((m*(1+l1)+1+l2)^2-
4*m*(l1+l2+1))^(1/2.))/2. lt e) then begin
n=n+1
goto,jump1
endif
endif else begin

```

```

if (m*(1+a*l1)+(1+a*l2) gt -e) then begin
n=n+1
goto,jump1
endif
endelse
endfor
endif
endif
jump1:

/*Die 4 Bedingungen fuer beta1<beta2 werden ueberprueft*/
if (b2-b1-l1-l2 gt e) then begin
if (b1+l1 lt e) and (b2-l2 lt 1-e) and (b2-l2 gt e) then begin
n=n+1
endif
if (b1+l1 lt e) and (b2-1-l2 gt -e) then begin
n=n+1
endif
if (b1+l1 lt 1-e) and (b1+l1 gt e) and (b2-1-l2 gt -e)
then begin
n=n+1
endif
if (b1+l1 lt 1-e) and (b1+l1 gt e) and (b2-l2 lt 1-e)
and (b2-l2 gt e) then begin
n=n+1
endif
endif

***Überprüfung der UNSTETIGEN Fixpunkte***
if (abs(b1-b2) gt e) and (l1 ge e) and (l2 ge e) then
begin
***B1***
if ((b1-l1-b2+l2 lt -e) and (b2-l2-b1-l1 lt -e) and
(b1+l1-b2-l2 lt -e)) or ((b2-l2-b1+l1 lt -e) and (b1-l1-
b2-l2 lt -e) and (b2+l2-b1-l1 lt -e)) or $
((b1-l1-b2+l2 lt -e) and (b2+l2-b1-l1 lt -e)) or ((b2-l2-
b1+l1 lt -e) and (b1+l1-b2-l2 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif

if (abs(b1-b2) gt e) and (((l1 ge e) and (l2 le -e)) or
((l2 ge e) and (l1 le -e))) then begin
***B2*** Beta=(0,0)
for p=1,20 do begin
for q=1,20 do begin
m1=0.1*p
m2=0.1*q
if (l1 ge e) and (l2 le -e) then begin
if (m1*b1-m2*b2 gt e) and (l2+b2 lt -e) and (-l1+b1 lt
-e) then begin
n=n+1
goto,jump2
endif

```



```

n=n+1
endif
endif
b1_f = b1
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (abs(l1) lt e) then
begin
if (abs(b2) lt e) and (l2*b1_f lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 gt e) and (l2*b1_f+1 lt e) then begin
n=n+1
endif
endif

;***B4***
b2_f = 1/l2
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b2_f-b2 lt e) and
(abs(l2) gt e) and (l2 gt e) then begin
if (abs(b2) lt e) and (l1*b2_f lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 gt e) and (l1*b2_f+1 lt e) then begin
n=n+1
endif
endif
b2_f = -1/l2
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b2_f-b2 gt -e) and
(abs(l2) gt e) and (l2 gt e) then begin
if (abs(b2) lt e) and (l1*b2_f lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 gt e) and (l1*b2_f+1 lt e) then begin
n=n+1
endif
endif
b2_f = b2
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (abs(l2) lt e) then
begin
if (abs(b2) lt e) and (l1*b2_f lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 gt e) and (l1*b2_f+1 lt e) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

;***B5***
if (abs(b1) lt e) and (l1 lt e) then begin
if (b2 lt 1+e) and (b2 gt 1-e) and (l2 lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 lt 1-e) and (l2 lt -1+e) then begin
n=n+1
endif
endif
if (b1 gt e) and (l1 lt -1+e) then begin
if (b2 lt 1+e) and (b2 gt 1-e) and (l2 lt e) then begin
n=n+1
endif
if (b2 lt 1-e) and (l2 lt -1+e) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

;***B6***
b1_f = 1+1/l1
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b1_f-b1 lt e) and
(abs(l1) gt e) and (l1 gt e) then begin

```

```

if (b2 gt 1-e) and (b2 lt 1+e) and (-l2*(1-b1_f) gt -e)
then begin
n=n+1
endif
if (b2 lt 1-e) and (-l2*(1-b1_f)-1 gt -e) then begin
n=n+1
endif
endif
b1_f = 1-1/l1
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b1_f-b1 gt -e) and
(abs(l1) gt e) and (l1 gt e) then begin
if (b2 gt 1-e) and (b2 lt 1+e) and (-l2*(1-b1_f) gt -e)
then begin
n=n+1
endif
endif
if (b2 lt 1-e) and (-l2*(1-b1_f)-1 gt -e) then begin
n=n+1
endif
endif
b1_f = b1
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (abs(l1) lt e) then
begin
if (b2 gt 1-e) and (b2 lt 1+e) and (-l2*(1-b1_f) gt -e)
then begin
n=n+1
endif
endif
if (b2 lt 1-e) and (-l2*(1-b1_f)-1 gt -e) then begin
n=n+1
endif
endif

;***B8***
b2_f = 1+1/l2
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b2_f-b2 lt e) and
(abs(l2) gt e) and (l2 gt e) then begin
if (b1 gt 1-e) and (b1 lt 1+e) and (-l1*(1-b2_f) gt -e)
then begin
n=n+1
endif
if (b1 lt 1-e) and (-l1*(1-b2_f)-1 gt -e) then begin
n=n+1
endif
endif
endif
b2_f = 1-1/l2
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b2_f-b2 gt -e) and
(abs(l2) gt e) and (l2 gt e) then begin
if (b1 gt 1-e) and (b1 lt 1+e) and (-l1*(1-b2_f) gt -e)
then begin
n=n+1
endif
if (b1 lt 1-e) and (-l1*(1-b2_f)-1 gt -e) then begin
n=n+1
endif
endif
endif
b2_f = b2
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (abs(l2) lt e) then
begin
if (b1 gt 1-e) and (b1 lt 1+e) and (-l1*(1-b2_f) gt -e)
then begin
n=n+1
endif
if (b1 lt 1-e) and (-l1*(1-b2_f)-1 gt -e) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

;***B9***
b1_f = b2+1/l1

```

```

if (b2 lt 1-e) and (b2 gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b1_f
gt e) and (b1_f-b1 lt e) and (abs(l2) lt e) $
and (abs(l1) gt e) and (l1 gt e) then begin
n=n+1
endif
b2_f = b1+1/l2
if (b1 lt 1-e) and (b1 gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b2_f
gt e) and (b2_f-b2 lt e) and (abs(l2) gt e) $
and (abs(l1) lt e) and (l2 gt e) then begin
n=n+1
endif
if (abs(b1-b2) lt e) then begin
for h=1,20 do begin
m=0.1*h
if ((m*(a+1)+a+l2)^2-4*m*(a*l1+a*l2+a^2) ge -e)
then begin
if ((-m*(a+1)-a-l2+((m*(a+1)+a+l2)^2-
4*m*(a*l1+a*l2+a^2))^(1/2.))/2. lt e) and $
((-m*(a+1)-a-l2+((m*(a+1)+a+l2)^2-
4*m*(a*l1+a*l2+a^2))^(1/2.))/2. lt e) then begin
n=n+1
goto.jump1
endif
endif else begin
if (m*(a+1)+(a+l2) gt -e) then begin
n=n+1
goto.jump1
endif
endif
endif
endif
jump1:
if (abs(l1) lt e) and (abs(l2) lt e) then begin
n=n+1
endif
b2_f = b1-1/l1
if (b1 lt 1-e) and (b1 gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b2_f
gt e) and (b2_f-b2 gt -e) and (abs(l1) lt e) $
and (abs(l2) gt e) and (l2 gt e) then begin
n=n+1
endif
b1_f = b2-1/l1
if (b2 lt 1-e) and (b2 gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b1_f
gt e) and (b1_f-b1 gt -e) and (abs(l2) lt e) $
and (abs(l1) gt e) and (l1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;***Überprüfung aller UNSTETIGEN Fixpunkte***
;***B1***
b1_f = b2+1/l1
if (b1_f lt 1+e) and (b1_f gt -e) and (b1_f-b1 lt -e)
and (-l2*(b2-b1_f)+1 gt e) and (-l2*(b2-b1_f)-1 lt -e)
then begin
n=n+1
endif

;***B4***
b2_f = b1+1/l2
if (b2_f lt 1+e) and (b2_f gt -e) and (b2_f-b2 lt -e)
and (-l1*(b1-b2_f)+1 gt e) and (-l1*(b1-b2_f)-1 lt -e)
then begin
n=n+1

```

```

endif

;***B2***
b1_f = b2-1/l1
if (b1_f lt 1+e) and (b1_f gt -e) and (b1_f-b1 gt e)
and (-l2*(b2-b1_f)+1 gt e) and (-l2*(b2-b1_f)-1 lt -e)
then begin
n=n+1
endif

;***B5***
b2_f = b1-1/l2
if (b2_f lt 1+e) and (b2_f gt -e) and (b2_f-b2 lt -e)
and (-l1*(b1-b2_f)+1 gt e) and (-l1*(b1-b2_f)-1 lt -e)
then begin
n=n+1
endif

;***B3***
if (abs(b1-b2) gt e) and (-l1*(b1-b2)+1 gt e) and (-
l1*(b1-b2)-1 lt -e) and (-l2*(b2-b1)+1 gt e) and (-
l2*(b2-b1)-1 lt -e) then begin
n=n+1
endif

nfix(i,j,k,l)=n

endifor
endifor
endifor
endifor

fnr=0
for i=0,dim b1-1 do begin
b1=.2
for j=6,6 do begin
b2=j*deltab
s=' '
s='b1 =' + string(b1) + ' b2 =' + string(b2)
fnr=7
window,fnr,xsize=500,ysize=500
plot,[0,0],[0,0],xrange=[-ig,ig],yrange=[-
ig,ig],background=rgb(255,255,255),color=rgb(0,0,0
),$
xtitle='lambda1',ytile='lambda2',title=s
for k=2,dim l1-1 do begin
for l=2,dim l2-1 do begin

if (nfix(i,j,k,l) eq 0) then c=rgb(255,255,255) ; weiss
if (nfix(i,j,k,l) eq 1) then c=rgb(0,0,255) ; blau
if (nfix(i,j,k,l) eq 2) then c=rgb(0,255,0) ; gruen
if (nfix(i,j,k,l) eq 3) then c=rgb(255,0,0) ; rot
if (nfix(i,j,k,l) eq 4) then c=rgb(255,0,255) ; violett
if (nfix(i,j,k,l) eq 5) then c=rgb(0,0,0) ; schwarz
if (nfix(i,j,k,l) eq 6) then c=rgb(255,255,0) ; gelb

plots,-ig+deltal*k,-ig+deltal*l,psym=3,color=c
endifor
endifor
endifor
endifor
end

```

Code 9

Programm *stab1_3D*. Ermittelt die stabilen Fixpunkte des dreidimensionalen Systems *lsmo1*.

***** FIXPUNKTANALYSE DES PROGRAMMS LSMODABAB *****

***** 3-DIMENSIONALES SYSTEM *****

```
ig=4.
deltal=2
diml1=5
diml2=(ig/deltal)*2
nfix=intarr(diml1,diml1,diml1,diml1,diml1,diml1)
e=0.0000002
```

```
b1=1
b2=0.5
b3=0.3
for i=0,diml1-1 do begin
l12=-ig+deltal*i
for j=0,diml1-1 do begin
l13=-ig+deltal*j
for k=0,diml1-1 do begin
l21=-ig+deltal*k
for l=0,diml1-1 do begin
l23=-ig+deltal*l
for m=0,diml1-1 do begin
l31=-ig+deltal*m
for p=0,diml1-1 do begin
l32=-ig+deltal*p
n=0
```

```
***B1***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l12-l13 gt e)) or ((b1 lt 1-e)
and (-l12-l13-1 gt e)) then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l21 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l21+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b3) lt e) and (l31 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l31+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B2***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l12-l13 gt e)) or ((b1 lt 1-e)
and (-l12-l13-1 gt e)) then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l21+l23 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l21+l23+1 lt -e)) then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l31-l32) lt e) then
begin
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B3***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l12 gt e)) or ((b1 lt 1-e) and
(-l12-1 gt e)) then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l21+l23 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l21+l23+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l32 gt e)) or ((b3 lt 1-e) and
(-l32-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B4***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l12 ge e)) or ((b1 lt 1-e) and
(-l12-1 ge e)) then begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(l21+l23) lt e)
then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l32 ge e)) or ((b3 lt 1-e) and
(-l32-1 ge e)) then begin
```

```
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B5***
if (abs(b1-1) lt e) and (abs(b2-1) lt e) and (abs(b3-1)
lt e) and (abs(l12)+abs(l13) lt 1) and
(abs(l21)+abs(l23) lt 1) and (abs(l31)+abs(l32) lt 1)
then begin
n=n+1
endif
```

```
***B6***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l13 gt e)) or ((b1 lt 1-e) and
(-l13-1 gt e)) then begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l23 gt e)) or ((b2 lt 1-e) and
(-l23+1 gt e)) then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l31+l32) lt e)
then begin
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B7***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l13 gt e)) or ((b1 lt 1-e) and
(-l13-1 gt e)) then begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l23 gt e)) or ((b2 lt 1-e) and
(-l23-1 gt e)) then begin
if ((abs(b3) lt e) and (l31+l32 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l31+l32+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B8***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l12-l13 gt e)) or ((b1 lt 1-e)
and (-l12-l13-1 gt e)) then begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(l21-l23) lt e) then
begin
if ((abs(b3) lt e) and (l31+l32 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l31+l32+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif
```

```
***B9***
if ((abs(b1-1) lt e) and (-l12-l13 gt e)) or ((b1 lt 1-e)
and (-l12-l13-1 gt e)) then begin
;b2*>b3*
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(l21-l23) lt e) then
begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l31+l32) lt e)
then begin
n=n+1
goto,jump9
endif
endif
```

```
;b2*=b3*
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(l21) lt e) then
begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l31) lt e) then
begin
n=n+1
```

```

goto,jump9
endif
endif
;b2*<b3*
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(l21+l23) lt e)
then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l31-l32) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump9
endif
endif
endif
jump9:

.***B10***
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l12-l13) lt e)
then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l21 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l21+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b3) lt e) and (l31 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l31+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B11***
if ((abs(b2) lt e) and (l21+l23 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l21+l23+1 lt -e)) then begin
;b1*>b3*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l12-l13) lt e)
then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l31-l32) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump11
endif
endif
;b1*=b3*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l12) lt e) then
begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l32) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump11
endif
endif
;b1*<b3*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l12+l13) lt e)
then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l31-l32) lt e)
then begin
n=n+1
goto,jump11
endif
endif
endif
jump11:

.***B12***
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l12+l13) lt e)
then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l21+l23 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l21+l23+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l31-l32 gt e)) or ((b3 lt 1-e)
and (-l31-l32-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
endif

```

```

endif
endif

.***B13***
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l31-l32 gt e)) or ((b3 lt 1-e)
and (-l31-l32+1 gt e)) then begin
;b1*>b2*
if (b1 gt e)and (b1 lt 1-e) and (abs(-l12+l13) lt e)
then begin
if (b2 gt e)and (b2 lt 1-e) and (abs(l21+l23) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump13
endif
endif
;b1*=b2*
if (b1 gt e)and (b1 lt 1-e) and (abs(l13) lt e) then
begin
if (b2 gt e)and (b2 lt 1-e) and (abs(l23) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump13
endif
endif
;b1*<b2*
if (b1 gt e)and (b1 lt 1-e) and (abs(l12+l13) lt e) then
begin
if (b2 gt e)and (b2 lt 1-e) and (abs(-l21+l23) lt e)
then begin
n=n+1
goto,jump13
endif
endif
endif
jump13:

.***B14***
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(l12+l13) lt e)
then begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l21 gt e)) or ((b2 lt 1-e) and
(-l21-1 gt e)) then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l31 gt e)) or ((b3 lt 1-e) and
(-l31-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B15***
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l21-l23 gt e)) or ((b2 lt 1-e)
and (-l21-l23-1 gt e)) then begin
;b1*>b3*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(l12-l13) lt e) then
begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l32+l31) lt e)
then begin
n=n+1
goto,jump15
endif
endif
;b1*=b3*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(l12) lt e) then
begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l32) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump15
endif
endif
endif

```

```

;b1*<b3*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(l12+l13) lt e)
then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(l32-l31) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump15
endif
endif
endif
jump15:

.***B16***
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(l12-l13) lt e) then
begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l21-l23 gt e)) or ((b2 lt 1-e)
and (-l21-l23-1 gt e)) then begin
if ((abs(b3) lt e) and (l31+l32 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l31+l32+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B17***
if ((abs(b3) lt e) and (l31+l32 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l31+l32+1 lt -e)) then begin
;b1*>b2*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l13-l12) lt e)
then begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l23+l21) lt e)
then begin
n=n+1
goto,jump17
endif
endif
;b1*=b2*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l13) lt e) then
begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l23) lt e) then
begin
n=n+1
goto,jump17
endif
endif
;b1*<b2*
if (b1 gt e) and (b1 lt 1-e) and (abs(-l13+l12) lt e)
then begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l23-l21) lt e)
then begin
n=n+1
goto,jump17
endif
endif
endif
jump17:

.***B19***
if (abs(b1) lt e) and (abs(b2) lt e) and (abs(b3) lt e)
and (abs(l12)+abs(l13) lt 1) and (abs(l21)+abs(l23) lt
1) and (abs(l31)+abs(l32) lt 1) then begin
n=n+1
endif

.***B20***
if ((abs(b1) lt e) and (l13 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l13+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l23 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l23+1 lt -e)) then begin

```

```

if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l31-l32) lt e)
then begin
n=n+1
endif
endif

.***B21***
if ((abs(b1) lt e) and (l13 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l13+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b2) lt e) and (l23 lt -e)) or ((b2 gt e) and
(l23+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l31-l32 gt e)) or ((b3 lt 1-e)
and (-l31-l32-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B22***
if ((abs(b1) lt e) and (l12+l13 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l12+l13+1 lt -e)) then begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l21+l23) lt e)
then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l31-l32 gt e)) or ((b3 lt 1-e)
and (-l31-l32-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B23***
if ((abs(b1) lt e) and (l12+l13 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l12+l13+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l21 gt e)) or ((b2 lt 1-e) and
(-l21-1 gt e)) then begin
if ((abs(b3-1) lt e) and (-l31 gt e)) or ((b3 lt 1-e) and
(-l31-1 gt e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B24***
if ((abs(b1) lt e) and (l12+l13 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l12+l13+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l21-l23 gt e)) or ((b2 lt 1-e)
and (-l21-l23-1 gt e)) then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l31+l32) lt e)
then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B25***
if ((abs(b1) lt e) and (l12 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l12+1 lt -e)) then begin
if ((abs(b2-1) lt e) and (-l21-l23 gt e)) or ((b2 lt 1-e)
and (-l21-l23-1 gt e)) then begin
if ((abs(b3) lt e) and (l32 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l32+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B26***

```

```

if ((abs(b1) lt e) and (l12 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l12+1 lt -e)) then begin
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l21-l23) lt e)
then begin
if ((abs(b3) lt e) and (l32 lt -e)) or ((b3 gt e) and
(l32+1 lt -e)) then begin
n=n+1
endif
endif
endif

.***B27***
if ((abs(b1) lt e) and (l12+l13 lt -e)) or ((b1 gt e) and
(l12+l13+1 lt -e)) then begin
;b2*>b3*
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l21-l23) lt e)
then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l31+l32) lt e)
then begin
n=n+1
goto, jump27
endif
endif
;b2*=b3*
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l21) lt e) then
begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l31) lt e) then
begin
n=n+1
goto, jump27
endif
endif
;b2*<b3*
if (b2 gt e) and (b2 lt 1-e) and (abs(-l21+l23) lt e)
then begin
if (b3 gt e) and (b3 lt 1-e) and (abs(-l31-l32) lt e)
then begin
n=n+1
goto, jump27
endif
endif
endif
jump27:

.***B18***
.***innere Fixpunkte***
;b1*=b2*=b3*=b1=b2=b3
if (abs(b1-b2) lt e) and (abs(b2-b3) lt e) and (b1 gt e)
and (b1 lt 1-e) and (abs(l12)+abs(l13) lt 1) and
(abs(l21)+abs(l23) lt 1) and (abs(l31)+abs(l32) lt 1)
then begin
n=n+1
endif

nfix(i,j,k,l,m,p)=n

endfor
endfor
endfor
endfor
endfor
endfor

dimvec=diml1^6
vec=sort(nfix)
for s=0,dimvec-1 do begin
;l32
d=s
while (d gt diml1-1) do d=d-diml1

```

```

indexl32=d
;l31
d=s
while (d gt diml1^2-1) do d=d-diml1^2
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le diml1*(diml1-u)-1) and (d ge diml1*(diml1-u-
1)) then begin
indexl31=diml1-u-1
goto,jumpl31
endif
endif
endif
jumpl31:
;l23
d=s
while(d gt diml1^3-1) do d=d-diml1^3
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^2)*(diml1-u)-1) and (d ge
(diml1^2)*(diml1-u-1)) then begin
indexl23=diml1-u-1
goto,jumpl23
endif
endif
endif
jumpl23:
;l21
d=s
while(d gt diml1^4-1) do d=d-diml1^4
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^3)*(diml1-u)-1) and (d ge
(diml1^3)*(diml1-u-1)) then begin
indexl21=diml1-u-1
goto,jumpl21
endif
endif
endif
jumpl21:
;l13
d=s
while(d gt diml1^5-1) do d=d-diml1^5
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^4)*(diml1-u)-1) and (d ge
(diml1^4)*(diml1-u-1)) then begin
indexl13=diml1-u-1
goto,jumpl13
endif
endif
endif
jumpl13:
;l12
d=s
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^5)*(diml1-u)-1) and (d ge
(diml1^5)*(diml1-u-1)) then begin
indexl12=diml1-u-1
goto,jumpl12
endif
endif
endif
jumpl12:

null=0
neg=0
pos=0
if (-ig+deltal*indexl32 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl32 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl32) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl31 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl31 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl31) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl21 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl21 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl21) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl23 gt e) then pos = pos+1

```

```

if (-ig+deltal*indexl23 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl23) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl12 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl12 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl12) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl13 gt e) then pos = pos+1

```

```

if (-ig+deltal*indexl13 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl13) lt e) then null = null+1
print,null,neg,pos,nfix(vec(s)), Format='("null = ",l1,"
neg = ",l1," pos = ",l1," nfix = ",l2)'
endifor
end

```

Code 10

Programm *stab2_3D*. Ermittelt die stabilen Fixpunkte des dreidimensionalen Systems *lsmod2*.

```

***** FIXPUNKTANALYSE DES PROGRAMMS LSMODABAB *****
;
***** 3-DIMENSIONALES SYSTEM *****
ig=4.
deltal=2
diml1=5
diml2=(ig/deltal)*2
nfix=intarr(diml1,diml1,diml1,diml1,diml1,diml1)
e=0.0000002

b1=1
b2=0.5
b3=0.3
for i=0,diml1-1 do begin
l12=-ig+deltal*i
for j=0,diml1-1 do begin
l13=-ig+deltal*j
for k=0,diml1-1 do begin
l21=-ig+deltal*k
for l=0,diml1-1 do begin
l23=-ig+deltal*l
for m=0,diml1-1 do begin
l31=-ig+deltal*m
for p=0,diml1-1 do begin
l32=-ig+deltal*p

n=0

;Bedingung 1
if (b1-1-l12-l13 gt e) and (b2+l21 lt -e) and (b3+l31 lt
-e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 2
b3_f = (l31+b3)/(1+l31+l32)
if (b3_f gt e) and (b3_f lt 1-e) and (-l12-l13*(1-
b3_f)+b1-1 gt e) and (l21+l23*b3_f+b2 lt -e) and $
(l31+l32+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 3
if (-l12+b1-1 gt e) and (l21+l23+b2 lt -e) and (-
l32+b3-1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 4
b2_f = (l21+l23+b2)/(1+l21+l23)
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (-l12*(1-b2_f)+b1-
1 gt e) and (-l32*(1-b2_f)+b3-1 gt e) and $
(l31+l32+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 5
if (abs(b1-1) lt e) and (abs(b2-1) lt e) and (abs(b3-1)
lt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 6
b3_f = (l31+l32+b3)/(1+l31+l32)
if (b3_f gt e) and (b3_f lt 1-e) and (-l13*(1-b3_f)+b1-
1 gt e) and (-l23*(1-b3_f)+b2-1 gt e) and $
(l31+l32+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 7
if (-l13+b1-1 gt e) and (-l23+b2-1 gt e) and
(l31+l32+b3 lt -e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 8
b2_f = (l21+b2)/(1+l21+l23)
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (-l12*(1-b2_f)-
l13+b1-1 gt e) and (l31+l32*b2_f+b3 lt -e) and $
(l31+l32+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 9
b3_f =
(l31+l32*(l21+b2)/(l21+l23+1)+b3)/(l31+l32*(l21+1)/(
l21+l23+1)+1)
b2_f = (l21+l23*b3_f+b2)/(l21+l23+1)
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b3_f gt e) and
(b3_f lt 1-e) and (-l12*(1-b2_f)-l13*(1-b3_f)+b1-1 gt
e) and $
(l31+l32+1 gt e) and (l21+l23+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 10
b1_f = b1/(1+l12+l13)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (l21*b1_f+b2 lt -e)
and (l31*b1_f+b3 lt -e) and $
(l12+l13+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 11
b1_f =
(l13*b3/(l31+l32+1)+b1)/(l12+l13*(l32+1)/(l31+l32+1
))
b3_f = (l31*b1_f+b3)/(l31+l32+1)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b3_f gt e) and
(b3_f lt 1-e) and (l21*b1_f+l23*b3_f+b2 lt -e) and $
(l31+l32+1 gt e) and (l12+l13+1 gt e) then begin

```

```

n=n+1
endif

;Bedingung 12
b1_f = (b1+l13)/(1+l12+l13)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (l21*b1_f+l23+b2
lt -e) and (-l31*(1-b1_f)-l32+b3-1 gt e) and $
(l12+l13+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 13
b1_f =
(l13+b1+l12*(l23+b2)/(l21+l23+1))/(l13+1+l12*(l23+
1)/(l21+l23+1))
b2_f = (l21*b1_f+l23+b2)/(l21+l23+1)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b2_f gt e) and
(b2_f lt 1-e) and (-l31*(1-b1_f)-l32*(1-b2_f)+b3-1 gt
e) and $
(l12+l13+1 gt e) and (l21+l23+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 14
b1_f = (l12+l13+b1)/(l12+l13+1)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (-l21*(1-b1_f)+b2-
1 gt e) and (-l31*(1-b1_f)+b3-1 gt e) and $
(l12+l13+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 15
b1_f =
(l12+b1+l13*(l32+b3)/(l31+l32+1))/(l12+1+l13*(l32+
1)/(l31+l32+1))
b3_f = (l31*b1_f+l32+b3)/(l31+l32+1)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b3_f gt e) and
(b3_f lt 1-e) and (-l21*(1-b1_f)-l23*(1-b3_f)+b2-1 gt
e) and $
(l31+l32+1 gt e) and (l12+l13+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 16
b1_f = (l12+b1)/(l12+l13+1)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (-l21*(1-b1_f)-
l23+b2-1 gt e) and (l31*b1_f+l32+b3 lt -e) and $
(l12+l13+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 17
b1_f =
(b1+l12*b2/(l21+l23+1))/(l13+1+l12*(l23+1)/(l21+l23
+1))
b2_f = (l21*b1_f+b2)/(l21+l23+1)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b2_f gt e) and
(b2_f lt 1-e) and (l31*b1_f+l32*b2_f+b3 lt -e) and $
(l12+l13+1 gt e) and (l21+l23+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 18
a = 1/(l12+l13+1)
b = 1/(l21+l23+1)
c = 1/(l31+l32+1)
b1_f =
(a*c*(b*l23*l12+l13)*b3+a*b*(c*l13*l32+l12)*b2+a*(1

```

```

-b*c*l23*l32)*b1)/(1-
a*b*c*(l12*l21/c+l13*l31/b+l12*l23*l31+l13*l32*l21))
b2_f = b*((l21+c*l23*l31)*b1_f+c*l23*b3+b2)/(1-
b*c*l23*l32)
b3_f = c*((l31+b*l32*l21)*b1_f+b*l32*b2+b3)/(1-
b*c*l23*l32)
if (b1_f gt e) and (b1_f lt 1-e) and (b2_f gt e) and
(b2_f lt 1-e) and (b3_f gt e) and (b3_f lt 1-e) then
begin
n=n+1
endif

;Bedingung 19
if (abs(b1) lt e) and (abs(b2) lt e) and (abs(b3) lt e)
then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 20
b3_f = b3/(l31+l32+1)
if (b3_f gt e) and (b3_f lt 1-e) and (l13*b3_f+b1 lt -e)
and (l23*b3_f+b2 lt -e) and $
(l31+l32+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 21
if (l13+b1 lt -e) and (l23+b2 lt -e) and (-l31-l32+b3-1
gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 22
b2_f = (l23+b2)/(l21+l23+1)
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (l12*b2_f+l13+b1
lt -e) and (-l13-l32*(1-b2_f)+b3-1 gt e) and $
(l21+l23+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 23
if (l12+l13+b1 lt -e) and (-l21+b2-1 gt e) and (-
l31+b3-1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 24
b3_f = (l32+b3)/(l32+l31+1)
if (b3_f gt e) and (b3_f lt 1-e) and (-l21-l23*(1-
b3_f)+b2-1 gt e) and (l12+l13*b3_f+b1 lt -e) and $
(l31+l32+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 25
if (l12+b1 lt -e) and (-l21-l23+b2-1 gt e) and (l32+b3
lt -e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 26
b2_f = b2/(l21+l23+1)
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (l12*b2_f+b1 lt -e)
and (l32*b2_f+b3 lt -e) and $
(l21+l23+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

;Bedingung 27

```

```

b2_f=(b2+l23*b3/(l31+l32+1))/(l21+1+l23*(l31+1)/(l3
1+l32+1))
b3_f = (l32*b2_f+b3)/(l31+l32+1)
if (b2_f gt e) and (b2_f lt 1-e) and (b3_f gt e) and
(b3_f lt 1-e) and (l12*b2_f+l13*b3_f+b1 lt -e) and $
(l31+l32+1 gt e) and (l21+l23+1 gt e) then begin
n=n+1
endif

nfix(i,j,k,l,m,p)=n

endfor
endfor
endfor
endfor
endfor
endfor

dimvec=diml1^6
vec=sort(nfix)
for s=0,dimvec-1 do begin
;l32
d=s
while (d gt diml1-1) do d=d-diml1
indexl32=d
;l31
d=s
while (d gt diml1^2-1) do d=d-diml1^2
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le diml1*(diml1-u-1) and (d ge diml1*(diml1-u-
1)) then begin
indexl31=diml1-u-1
goto,jumpl31
endif
endif
endif
jumpl31:
if (d le (diml1^5)*(diml1-u-1) and (d ge
(diml1^5)*(diml1-u-1)) then begin
indexl12=diml1-u-1
goto,jumpl12
endif
endif
endif
jumpl12:
null=0
neg=0
pos=0
if (-ig+deltal*indexl32 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl32 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl32) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl31 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl31 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl31) lt e) then null = null+1

```

```

;l23
d=s
while(d gt diml1^3-1) do d=d-diml1^3
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^2)*(diml1-u-1) and (d ge
(diml1^2)*(diml1-u-1)) then begin
indexl23=diml1-u-1
goto,jumpl23
endif
endif
endif
jumpl23:
;l21
d=s
while(d gt diml1^4-1) do d=d-diml1^4
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^3)*(diml1-u-1) and (d ge
(diml1^3)*(diml1-u-1)) then begin
indexl21=diml1-u-1
goto,jumpl21
endif
endif
endif
jumpl21:
;l13
d=s
while(d gt diml1^5-1) do d=d-diml1^5
for u=0,diml1-1 do begin
if (d le (diml1^4)*(diml1-u-1) and (d ge
(diml1^4)*(diml1-u-1)) then begin
indexl13=diml1-u-1
goto,jumpl13
endif
endif
endif
jumpl13:
;l12
d=s
for u=0,diml1-1 do begin
if (-ig+deltal*indexl21 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl21 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl21) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl23 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl23 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl23) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl12 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl12 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl12) lt e) then null = null+1
if (-ig+deltal*indexl13 gt e) then pos = pos+1
if (-ig+deltal*indexl13 lt -e) then neg = neg+1
if (abs(-ig+deltal*indexl13) lt e) then null = null+1
print,null,neg,pos,nfix(vec(s)), Format='("null = ",l1,"
neg = ",l1," pos = ",l1," nfix = ",l2)'
endif
endif
end

```

Literaturverzeichnis

- [1] „Microeconomic Theory“, P.R.G. Layard and A.A. Walters
- [2] „A Course in Microeconomic Theory“, David M. Kreps
- [3] „Fundamental Methods of Mathematical Economics“, Alpha C. Chiang
- [4] „Einführung in die Mikroökonomie“, Robert Linde (1992)
- [5] <http://www.mikrooekonomie.de>, Lorenz, W. (1999-2003), <mikro>online
- [6] Alessie, R. and A. Kapteyn (1991). “Habit formation, interdependent preferences and demographic effects in the almost ideal demand system.” *The Economic Journal* 101(May): 404-419.
- [7] Becker, G. S. (1974). “A Theory of Social Interaction.” *Journal of Political Economy* 82(6): 1063-1093.
- [8] Becker, G.S. (1998). „Accounting for Tastes“. Cambridge, Harvard University Press.
- [9] Bender, W. and M. Smith (1997). “Population, food, and nutrition.” *Population Bulletin* 51(4): 2-47.
- [10] Chung, J. W. (1994). „Utility and Production Functions“. Oxford, Blackwell.
- [11] Cowan, R., W. Cowan, et al. (2004). “Waves in Consumption with Interdependence among Consumers.” *Canadian Journal of Economics* 37(1): 149-177.
- [12] Drewnowski, A. (2003). “Fat and sugar: an economic analysis.” *Journal of Nutrition* 133: 838S-840S.
- [13] Drewnowski, A. and B. M. Popkin (1997). “The nutrition transition: New trends in the global diet.” *Nutrition Reviews* 55(2): 31-43.
- [14] Duchin, F. (2004). Sustainable Consumption of Food. Working Papers in Economics. Troy NY, Rensselaer Polytechnic Institute: 10.
- [15] Meade, B. and S. Rosen (1996). “Income and diet differences greatly affect food spending around the globe.” *Food Review* 4: 39-44.
- [16] O'Hara, S. U. and S. Stagl (2002). “Endogenous preferences and sustainable development.” *Journal of Socio-Economics* 31: 511-527.
- [17] Popkin, B. M. (1999). “Urbanization, lifestyle changes and the nutrition transition.” *World Development* 27(11): 1905-1916.
- [18] Postlewaite, A. (1998). “Social status, norms and economic performances - The social basis of interdependent preferences.” *European Economic Review* 42: 779-800.
- [19] Reiter, S. (2001). “Interdependent preferences and groups of agents.” *Journal of Public Economic Theory* 3(1): 27-67.
- [20] Stigler, G. J. and G. S. Becker (1977). “De Gustibus Non Est Disputandum.” *American Economic Review* 67(2): 76-90.